UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 2 (Sommersemester 2009) Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $\Phi : C^k(\mathbb{R}^N) \to X$ ($k \in \mathbb{N}_0, N \in \mathbb{N}$) eine stetige lineare Abbildung von der vollständigen metrisierbaren Algebra aller auf $\mathbb{R}^N$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen in einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ mit $\operatorname{supp}\Phi \subseteq \{a\}$ für einen Punkt $a \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass es dann Vektoren $x_\alpha \in X$ für alle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j \leq k$ gibt, so dass für alle $u \in C^k(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\Phi(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(a) x_\alpha \,.$$

Hinweis: Fixieren Sie eine Funktion $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\operatorname{supp}\chi \subset U_1(0)$ und $\chi \equiv 1$ auf $U_{1/2}(0)$. Ist $\rho \in C(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\frac{\partial^\alpha \rho}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^N \text{ mit } |\alpha| \leq k,$$

so beweist man $\Phi(\rho) = 0$, indem man die Existenz einer positiven Konstanten C zeigt, so dass für alle $t > 0$ gilt

$$|\Phi(\rho)| = |\Phi\left(\chi\left(t(\cdot - a)\right)\rho\right)| \leq \frac{C}{t}.$$

Anschließend betrachte man die Taylordarstellung mit Restglied für alle $u \in C^k(\mathbb{R}^N)$.

Aufgabe 2. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und T ein $C^k(\mathbb{C})$-skalarer Operator, der einen stetigen $C^k(\mathbb{C})$-Funktionalkalül besitze. Zeigen Sie: Genau dann besitzt T wenigstens einen Eigenwert, wenn es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $x_0 \in X$ gibt mit $\sigma_T(x_0) = \{z_0\}$.

Aufgabe* 3. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und T ein quasinilpotenter $C^k(\mathbb{C})$-skalarer Operator, der einen stetigen $C^k(\mathbb{C})$-Funktionalkalül besitze. Zeigen Sie dass dann $T^{k+1} = 0$ gilt.

Abgabetermin: Freitag, 03.07.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/spektral/spektral-ueb.html`