



Übungen zur Vorlesung
Lokale Methoden in der Spektraltheorie II
Sommersemester 2009

Blatt 3

Abgabe: Freitag, 15.05.2009, vor der Vorlesung

Sei X ein komplexer Banachraum.

Aufgabe 1

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ und sei $\tilde{X}_T(F) = \{x \in X \mid \sigma_T(x) \subseteq F\}$ für alle $F \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $\tilde{X}_T(F)$ ist ein T -hyperinvarianter Teilraum von X , d. h. für alle Operatoren S , die mit T kommutieren, gilt $S(\tilde{X}_T(F)) \subseteq \tilde{X}_T(F)$.
 - (b) Für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus F$ gilt $(\lambda - T)\tilde{X}_T(F) = \tilde{X}_T(F)$.
 - (c) Gilt für $x \in X$ und $\lambda \in F$: $(\lambda - T)x \in \tilde{X}_T(F)$, so ist $x \in \tilde{X}_T(F)$.
 - (d)* Ist Y ein T -invarianter (d. h. $TY \subseteq Y$) abgeschlossener linearer Unterraum von X mit $\sigma(T|_Y) \subseteq F$, so ist $Y \subseteq \tilde{X}_T(F)$.
-

Aufgabe 2

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ so, dass $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ gilt mit abgeschlossenen, disjunkten und nichtleeren Mengen $\sigma_1, \sigma_2 \subset \mathbb{C}$. Seien weiter $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ offen mit $\sigma_j \subset \Omega_j$ für $j = 1, 2$ und mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Ferner seien $h_j : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $h_j(z) = \chi_{\Omega_j}|_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ für $j = 1, 2$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $X_T(\sigma_1) + X_T(\sigma_2) = X$.
 - (b) $X_T(\sigma_j) = \text{ran } h_j(T)$ und $X_T(\sigma_j)$ ist spektral maximal für $j = 1, 2$.
 - (c)* Ist T ein kompakter Operator, so ist T zerlegbar.
-

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss09/spektral/spektral-ueb.html