UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 2 (Sommersemester 2009) Blatt 4

Aufgabe 1. W bezeichne die Wieneralgebra der stetigen Funktionen f auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ mit absolut konvergenter Fourierreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n z^n$. Zeigen Sie:

(a) $C^2(\mathbb{T}) \subset W$.
(b) W ist eine im Sinn der Vorlesung zulässige Algebra.

Aufgabe 2. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann sind die folgenden Operatoren $S \in \mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{Z}))$ mit

$$x = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} \mapsto Sx := (x_{n+1})_{n=-\infty}^{\infty}$$

und $T_h \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$ (mit $h \in \mathbb{R}$) mit

$$(T_h f)(x) := f(x+h)\,, \qquad (f \in L^p(\mathbb{R}),\, x \in \mathbb{R})$$

W-skalar.

Aufgabe* 3. Sei $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und sei $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein mit S kommutierender nilpotenter Operator mit $N^m = 0$ für ein $m \geq 2$. Zeigen Sie, dass der Operator $T = S + N$ ein $C^{m-1}(\mathbb{C})$-skalarer Operator ist.

Hinweis: Versuchen Sie es mit dem Ansatz

$$\Phi(f) := \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(S) N^n$$

für $f \in C^{m-1}(\mathbb{C})$. Hierbei sei $g \mapsto g(S)$ der aus der Funktionalanalysis bekannte stetige Funktionalkalkül für normale Operatoren.

Abgabetermin: Freitag, 22.05.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss09/spektral/spektral-ueb.html`