UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 1

Zunächst sollen einige elementare Aussagen aus der Linearen Algebra gezeigt werden. Wir gehen von folgender Situation aus: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\iota} E_2 \xrightarrow{\pi} E_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{K}$-Vektorräumen E_1, E_2, E_3 und $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen ι, π, d.h. es gelte

$$\ker \iota = \{0\}, \qquad \operatorname{ran} \iota = \ker \pi, \quad \operatorname{ran} \pi = E_3.$$

Seien weiter $T_j : E_j \to E_j$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen mit

$$\iota \circ T_1 = T_2 \circ \iota \qquad \text{und} \qquad \pi \circ T_2 = T_3 \circ \pi.$$

Offensichtlich gilt: Ist T_2 injektiv (bzw. surjektiv) so gilt dies auch für T_1 (bzw. für T_3).

Aufgabe 1. Zeigen Sie darüber hinaus die folgenden Aussagen:

(a) Sind die Abbildungen T_1 und T_3 injektiv (bzw. surjektiv), so ist auch T_2 injektiv (bzw. surjektiv).
(b) Ist T_1 surjektiv und T_2 injektiv, so ist T_3 injektiv.
(c) Ist T_2 surjektiv und T_3 injektiv, so ist T_1 surjektiv.

In der nächsten Aufgabe wollen wir voraussetzen, dass in der obigen Situation $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist, dass die Räume $(E_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2, 3$, Banachräume sind und dass die linearen Abbildungen $\iota, \pi, T_1, T_2, T_3$ stetig sind.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Die Vereinigung von je zwei der drei Spektren

$$\sigma(T_1), \quad \sigma(T_2), \quad \sigma(T_3)$$

enthält das dritte.

Ist $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, so bezeichnen wir das Komplement der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\sigma(T)$ mit $\sigma_f(T)$ und nennen $\sigma_f(T)$ das volle Spektrum von T. Das volle Spektrum entsteht also aus dem Spektrum durch Hinzunahme aller "Löcher" von $\sigma(T)$.

Ist F ein abgeschlossener unter T invarianter Unterraum von E, so bezeichnen wir mit $T|_F \in \mathcal{L}(F)$ die Restriktion von T auf F und mit T^F den von T auf dem mit der Quotientennorm versehenen Quotienteraum E/F induzierten stetigen linearen Operator (also mit $T^F(x + F) := Tx + F$ für alle $x \in E$).

Aufgabe 3. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem komplexen Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ und sei F ein abgeschlossener unter T invarianter Unterraum von E. Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \|T\|$ gilt $(z - T)^{-1}(F) \subseteq F$.
(b) $\sigma(T|_F) \subseteq \sigma_f(T)$.
(c) $\sigma(T^F) \subseteq \sigma_f(T)$.

Hinweis zu (b): Erinnern Sie sich daran, dass die Resolventenfunktion

$$z \mapsto (z - T)^{-1}$$

auf der Resolventenmenge komplex differenzierbar ist und wenden Sie den Identitätssatz in geeigneter Form an.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in \mathfrak{R}$ mit $xy = yx$ gilt $\exp(x + y) = \exp(x)\,\exp(y)$.
(b) Für alle $a, b, c \in \mathfrak{R}$ gilt $\exp(a)\,b\,\exp(c) = \exp(L_a + R_c)(b)$.
Hierbei sind $L_a, R_c \in \mathcal{L}(\mathfrak{R})$ definiert durch

$$L_a(x) = ax \qquad \text{und} \qquad R_c(x) = xc \qquad (x \in \mathfrak{R}).$$

Aufgabe* 5. Sei $(\mathfrak{R}\|\cdot\|)$ eine C^*-Algebra mit Einselement 1. Zeigen Sie: Für $x \in \mathfrak{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $x = x^*$, d.h. x ist hermitesch.
(b) $\|\exp(itx)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
(c) $\|\exp(itx)\| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe* 6. Seien $(\mathfrak{R}_1, \|\cdot\|_1), (\mathfrak{R}_2, \|\cdot\|_2)$ zwei C^*-Algebren mit Einselementen $1_{\mathfrak{R}_1}, 1_{\mathfrak{R}_2}$ und sei $\Phi : \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2$ ein $*$-Homomorphismus mit $\Phi(1_{\mathfrak{R}_1}) = 1_{\mathfrak{R}_2}$. Zeigen Sie, daß Φ dann stetig ist mit $\|\Phi\| = 1$.

Abgabetermin: Donnerstag, 22.04.2010, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`

Informationen zum Erwerb eines Leistungsnachweises

Sie können zu dieser Vorlesung einen (benoteten) Leistungsnachweis erwerben. Die Voraussetzungen hierfür sind:

(a) **erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb**, d.h.
- **ernsthafte** Bearbeitung von mindestens 60 % der gestellten Übungsaufgaben,
- **mindestens** 40 % aller erreichbaren Punkte,
- aktive Mitarbeit in der Übungsgruppe,

und
(b) **Bestehen der mündlichen Prüfung am Ende des Semesters**.

Der Termin für diese mündliche Prüfung kann individuell mit mir vereinbart werden, sollte aber vor dem 16. September und nach Semesterende liegen.