UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 2

Aufgabe 1. Für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie:

(a) $|T|$ ist der einzige positive Operator P mit der Eigenschaft, daß $\|Px\| = \|Tx\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.
(b) Ist T invertierbar, so gibt es genau einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $T = U|T|$.
(c) Ist T normal, so gibt es einen unitären Operator U mit $T = U|T| = |T|U$.

Aufgabe 2. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in \mathcal{F}(E,F)$ so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x'_1, \dots, x'_n \in E'$, $y_1, \dots, y_n \in F$ mit
$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x'_j(x) y_j \quad \text{für alle } x \in E.$$
(b) Ist $A \in \mathcal{F}(E,F)$, so ist $A' \in \mathcal{F}(F', E')$.
(c) Ist $T \in \Phi(E,F)$, so ist $T' \in \Phi(F', E')$ und $\operatorname{ind}(T') = -\operatorname{ind}(T)$.

Aufgabe 3. Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in C([0,1])$ und sei $h \in C([0,1] \times [0,1])$. Zeigen Sie: Der durch
$$(Tf)(t) := f^{(n+1)}(t) + \sum_{j=0}^{n} a_j(t) f^{(j)}(t) + \int_0^1 h(s,t) f^{(n+1)}(s)\,ds \quad (f \in C^{(n+1)}([0,1]),\ t \in [0,1])$$
definierte Operator $T : C^{(n+1)}([0,1]) \to C([0,1])$ ist ein Fredholmoperator. Berechnen Sie $\operatorname{ind}(T)$.

Aufgabe 4. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $T \in \mathcal{L}(E)$. Zeigen Sie: Ist $T^n \in \mathcal{K}(E)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lambda 1_E - T$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Fredholmoperator vom Index 0.

Aufgabe* 5. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt *Riesz–Operator* falls die Restklasse $T + \mathcal{K}(E)$ von T in $\mathcal{Q}(E) = \mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ quasinilpotent ist.

(a) Zeigen Sie: $T \in \mathcal{L}(E)$ ist genau dann ein Riesz–Operator, wenn für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ der Operator $T_\lambda := \lambda 1_E - T$ ein Fredholmoperator vom Index 0 ist.
(b) Geben Sie ein Beispiel eines Riesz–Operators $T \in \mathcal{L}(E)$ an, der kein kompakter Operator ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 29.04.2010, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`