



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 3

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Gelfand-Raum der *Sandwichalgebra*

$$S(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) : \text{es gibt ein } g \in A(\mathbb{D}) \text{ mit } g|_{\partial\mathbb{D}} = f|_{\partial\mathbb{D}}\}.$$

Hierbei sei $S(\mathbb{D})$ versehen mit der sup-Norm.

Aufgabe 2. Berechnen Sie den Šilovrand der Sandwichalgebra aus Aufgabe 1

Im folgenden sei $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{T})$ der Raum der auf $\mathbb{T}$ bezüglich des normalisierten Lebesgemaßes dm quadratintegrierbaren Funktionen versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} dm(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} \frac{dt}{2\pi} \quad (f, g \in L^2(\mathbb{T})).$$

Bekanntlich ist durch $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $e_n(z) := z^n$ für alle $z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$ gegeben. Für $f \in \mathcal{H}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $\hat{f}_n$ den n -ten Fourierkoeffizienten von f , so daß also $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e_n$ gilt. Wir definieren $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ durch

$$Sf := - \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{f}_n e_n + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n e_n \quad (f \in \mathcal{H}).$$

Für $a \in C(\mathbb{T})$ sei M_a der normale Operator der Multiplikation mit a auf $\mathcal{H}$. Bekanntlich hat dieser die Operatornorm $\|M_a\| = \|a\|_{\mathbb{T}}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Für alle $a \in C(\mathbb{T})$ ist $M_a S - S M_a \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $(M_{e_m} S - S M_{e_m}) e_n$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und verwenden Sie, dass die trigonometrischen Polynome dicht in $C(\mathbb{T})$ liegen.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Sind $a, b \in C(\mathbb{T})$ und hat $a^2 - b^2$ keine Nullstelle in $\mathbb{T}$, so ist $M_a + M_b S$ ein Fredholmoperator.

Für Lipschitz-stetige Funktionen $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ und $z = e^{it} \in \mathbb{T}$ definieren wir

$$\frac{1}{i\pi} \oint_{\zeta-z} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{i\pi} \int_{\{\zeta \in \mathbb{T}; |\zeta-z| \geq \varepsilon\}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta := \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{i\pi} \int_{[\delta, 2\pi-\delta]} \frac{ie^{i(s+t)} \phi(e^{i(s+t)})}{e^{i(s+t)} - e^{it}} ds$$

Aufgabe* 5. Zeigen Sie:

(a) $\frac{1}{i\pi} \oint_{\zeta-z} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = 1.$

(b) Für alle Lipschitz-stetigen Funktionen $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{i\pi} \oint_{\zeta-z} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

stetig auf $\mathbb{T}$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{T}$ gilt

$$(S e_n)(z) = \frac{1}{i\pi} \oint_{\zeta-z} \frac{e_n(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Abgabetermin: Donnerstag, 06.05.2010, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

<http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html>