



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{B}$ die Familie aller beschränkten Teilmengen eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ) . Zeigen Sie:

- (a) Eine Menge B in E ist genau dann τ -beschränkt, wenn es zu jeder τ -Nullumgebung U ein $c > 0$ gibt mit $A \subseteq cU$.
- (b) $A \subseteq B \in \mathcal{B} \implies A \in \mathcal{B}$. Insbesondere sind also beliebige Durchschnitte von beschränkten Mengen beschränkt.
- (c) $A, B \in \mathcal{B} \implies A \pm B \in \mathcal{B}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass in der Situation von Aufgabe 1 weiter gilt:

- (a) Endliche Vereinigungen von beschränkten Mengen sind beschränkt.
- (b) Für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}$ ist auch die abgeschlossene, absolutkonvexe Hülle wieder beschränkt.
- (c) Jede kompakte Teilmenge $K \subset E$ ist beschränkt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass in der Situation von Aufgabe 1 weiter gilt:

- (a) Eine Menge $A \subset E$ ist genau dann beschränkt, wenn für jede τ -stetige Halbnorm p gilt: $\sup_{a \in A} p(a) < \infty$.
- (b) Eine Menge $B \subset E$ ist genau dann beschränkt, wenn für jede Halbnorm p_α eines die Topologie τ definierenden Halbnormensystems $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ gilt: $\sup_{b \in B} p_\alpha(b) < \infty$.
- (c) Ist (F, τ_F) ein weiterer lokalkonvexer Hausdorffraum und ist $T : E \rightarrow F$ eine stetige lineare Abbildung so ist für alle $B \in \mathcal{B}$ die Menge $T(B)$ in (F, τ_F) beschränkt.

Aufgabe 4. Seien K_1 und K_2 zwei absolutkonvexe und kompakte Teilmengen eines lokalkonvexen Hausdorffraums (E, τ) . Zeigen Sie, dass dann auch die absolutkonvexe Hülle $\text{absconv}(K_1 \cup K_2)$ von $K_1 \cup K_2$ wieder τ -kompakt ist.

Aufgabe* 5. Zeigen Sie, dass mit den auf Blatt 3 eingeführten Bezeichnungen mit

$$a := \frac{1}{2}(e_m + e_n) \quad \text{und} \quad b := \frac{1}{2}(e_m - e_n)$$

gilt

$$\text{ind}(M_a + M_b S) = n - m.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $(M_a + M_b S)e_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Führen Sie anschließend für $M_a + M_b S$ die Fallunterscheidung in die Fälle $n = m$, $m > n$ und $m < n$ durch.

Abgabetermin: Donnerstag, 13.05.2010, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

<http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html>