UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 5

Aufgabe 1. Sei (E, τ) ein metrisierbarer lokalkonvexer Hausdorffraum und sei d eine die Topologie τ erzeugende Metrik auf E. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge A von E ist genau dann τ-präkompakt, wenn sie in dem metrischen Raum (E, d) präkompakt ist.
(b) Ist (E, τ) vollständig, so ist für jede kompakte Teilmenge K von (E, τ) auch die Menge $\overline{\operatorname{conv}(K)}$ kompakt.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel von $(L^1([0,1]), \|\cdot\|_1)$ keine Extremalpunkte besitzt.

(b) Kann $(L^1([0,1]), \|\cdot\|_1)$ Dualraum eines Banachraums sein?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Mengensysteme der Beispiele 5.2 tatsächlich die Bedingungen zu Satz 5.1 erfüllen.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass auf dem Dualraum eines normierten Raums die starke Topologie und die Normtopologie übereinstimmen.

Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ heißt *strikt konvex*, falls für alle $x, y \in E$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $x \neq y$ gilt $\|x + y\| < 2$. Insbesondere sind die ℓ^p- und die L^p-Räume für $1 < p < \infty$ strikt konvex. Dies liegt daran, dass für $1 < p < \infty$ in der Minkowski-Ungleichung $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ genau dann das Gleichheitszeichen gilt, wenn einer der beiden Terme x, y ein nicht negatives Vielfaches des anderen ist.

Aufgabe* 5. Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein strikt konvexer Banachraum, so gilt für die Menge B_e der Extremalpunkte der Einheitskugel B von E:

$$B_e = \{x \in E\,;\ \|x\| = 1\}.$$

Insbesondere hat also $L^p([0,1])$ für $1 < p < \infty$ viele Extremalpunkte.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 25.05.2010, 10:00 Uhr in meinen Briefkasten im Foyer von Gebäude E 2 4.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`