UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 6

Mit $C_{2\pi}^{\infty}$ bezeichnen wir den Raum aller 2π-periodischen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Versehen mit der durch das Halbnormensystem $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$p_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(t)|, \quad f \in C_{2\pi}^{\infty}, n \in \mathbb{N},$$

gegebenen Halbnormensystem ist $C_{2\pi}^{\infty}$ ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Bezüglich der punktweisen Multiplikation ist $C_{2\pi}^{\infty}$ eine Algebra.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) $C_{2\pi}^{\infty}$ ist vollständig und metrisierbar.
(b) Die Multiplikation $(f, g) \to fg$ ist stetig von $C_{2\pi}^{\infty} \times C_{2\pi}^{\infty}$ nach $C_{2\pi}^{\infty}$.

Ein lokalkonvexer Hausdorffraum hat die *Monteleigenschaft*, falls in ihm jede beschränkte Teilmenge relativkompakt ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $C_{2\pi}^{\infty}$ die Monteleigenschaft besitzt.

Mit s bezeichnen wir den *Raum der schnell fallenden Folgen*. Hierbei nennen wir eine komplexwertige Folge $a = (a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ *schnell fallend*, falls für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$q_k(a) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|(1 + |n|)^k < \infty.$$

Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt *langsam wachsend*, falls es ein $k = k(a) \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|(1 + |n|)^k < \infty.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie dass s, versehen mit der durch das Halbnormensystem $(q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegebenen lokalkonvexen Topologie, ein vollständiger und metrisierbarer lokalkonvexer Hausdorffraum ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass der Raum aller langsam wachsenden Folgen identifiziert werden kann mit dem Dualraum s' von s vermöge der Dualität

$$(a, b) \mapsto < a, b > := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n$$

für alle langsam wachsenden Folgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und alle $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in s$.

Aufgabe* 5. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $f \mapsto (\hat{f}_n)$ mit

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt, \quad (f \in C_{2\pi}^{\infty},\ n \in \mathbb{Z})$$

ein topologischer Isomorphismus von $C_{2\pi}^{\infty}$ auf s gegeben ist.

Insbesondere besitzt also auch s die Monteleigenschaft.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 02.06.2010, in der Übungsstunde.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`