UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 7

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und alle nicht leeren offenen Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ der Raum $C^k(\Omega)$ nicht normierbar ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $C^\infty(\Omega)$ mit Ω wie in Aufgabe 1 die Monteleigenschaft besitzt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ die Monteleigenschaft besitzt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass der Raum $X := \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$, versehen mit der Produkttopologie die Monteleigenschaft besitzt. Zeigen Sie, dass der Dualraum von X identifiziert werden kann mit dem Raum F aller finiten Folgen

$$F := \{\varphi = (\varphi_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} \,;\, \varphi_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}_0\}$$

vermöge der Dualität $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times F \to \mathbb{K}$, die gegeben ist durch

$$\langle x, \varphi \rangle := \sum_{n=0}^\infty x_n, \varphi_n \qquad (x = (x_n)_{n=0}^\infty \in X, \quad \varphi = (\varphi_n)_{n=0}^\infty \in F).$$

Aufgabe* 5. Für $k \in \mathbb{N}$ sei E_k der Raum aller Folgen $a = (a_n)_{n=0}^\infty$, so dass gilt:

$$p_k(a)^2 := \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 \Big(\frac{k+1}{k+2}\Big)^n < \infty.$$

Zeigen Sie:

(a) E_k ist ein Hilbertraum.
(b) Der Folgenraum $E := \bigcap_{k=1}^\infty E_k$ ist - versehen mit dem Halbnormensystem $(p_k)_{k=1}^\infty$ - ein vollständiger metrisierbarer lokalkonvexer Hausdorffraum.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 09.06.2010, in der Übungsstunde.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`