UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 8

Aufgabe 1. Ist $(F, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $K \subset F'$ kompakt bezüglich $\sigma(F', F)$, so ist auch die $\sigma(F', F)$-abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von K wieder $\sigma(F', F)$-kompakt.

Aufgabe 2. Seien (E, τ), K und $f : K \to E$ wie in Satz 7.1 und sei $T : (E, \tau) \to (F, \tau_F)$ eine stetige, lineare Abbildung von (E, τ) in einen weiteren lokalkonvexen Hausdorffraum (F, τ_F). Sei μ ein reguläres, abzählbar additives Borelmaß auf K. Zeigen Sie, daß dann das Integral $\int_K T(f(t))\, d\mu(t)$ existiert und daß gilt:

$$\int_K T(f(t))\, d\mu(t) = T\Big(\int_K f\, d\mu\Big).$$

Aufgabe 3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei Γ ein System von endlich vielen stückweise glatten Kurven. Zeigen Sie: Ist f eine auf $\mathrm{Spur}(\Gamma)$ stetige Funktion mit Werten in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$, so gilt

$$\Big\| \int_\Gamma f(z)\, dz \Big\| \le L(\Gamma) \max_{z \in \mathrm{Spur}(\Gamma)} \|f(z)\|.$$

Hierbei bezeichne $L(\Gamma)$ die Länge des Kurvensystems Γ.

Aufgabe 4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion $f : \Omega \to E$ mit Werten in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann auf Ω holomorph, wenn für jedes $z \in \Omega$ die Funktion f auf einer Kreisscheibe $\neq D \subseteq \Omega$ mit Mittelpunkt z mit positivem Radius durch eine in allen Punkten aus D in $(E, \|\cdot\|)$ konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten in E dargestellt werden kann.

(b) Für jedes $z \in \Omega$ ist die Potenzreihe aus (a) sogar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge der größten in Ω enthaltenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z konvergent.

Aufgabe* 5. Zeigen Sie, dass der Folgenraum E aus Aufgabe 5, Blatt 7, topologisch isomorph zum Raum $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ der auf $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen ist.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 16.06.2010, in der Übungsstunde.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`