UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 9

Aufgabe 1. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume und seien $T \in \mathcal{L}(E)$, $S \in \mathcal{L}(F)$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ stetige, lineare Operatoren mit $AT = SA$ und $\sigma(T, E) \cap \sigma(S, F) = \emptyset$. Zeigen Sie, daß dann schon $A = 0$ gelten muß.

Aufgabe 2. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$, dessen Spektrum von der Gestalt $\sigma(T, E) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ ist mit abgeschlossenen, nicht leeren zueinander disjunkten Mengen $\sigma_1, \sigma_2 \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß es dann einen Operator P in der Bikommutantenalgebra von T gibt mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $P \neq 0$, $1 - P \neq 0$.
(b) $P = P^2$.
(c) $\sigma(T|_{P(E)}, P(E)) = \sigma_1$ und $\sigma(T|_{\ker P}, \ker P) = \sigma_2$.

Aufgabe 3. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$

(a) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T, E)$ gilt

$$(z - T)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - w} (w - T)^{-1} \, dw \,,$$

wobei Γ ein $\sigma(T, E)$ umlaufendes und in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ verlaufendes Kurvensystem sei.

(b) Ist f eine in einer Umgebung Ω von $\sigma(T, E)$ holomorphe Funktion, so gilt die folgende *verallgemeinerte Cauchysche Integralformel*:

$$\Phi_T^\Omega(f^{(n)}) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z - T)^{-n-1} dz \,.$$

Hierbei sei Γ ein $\sigma(T, E)$ umlaufendes und in Ω verlaufendes Kurvensystem.

Aufgabe 4. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein stetiger linearer Operator auf einem Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ und sei $Q \in \mathcal{L}(E)$ ein mit T kommutierender, quasinilpotenter Operator. Zeigen Sie: $\sigma(T, E) = \sigma(T + Q, E)$ und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T, E)$ gilt

$$(z - T - Q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - T)^{-n-1} Q^n$$

Aufgabe* 5. Seien E, T, Q wie in Aufgabe 4. Zeigen Sie: Für alle in einer offenen Umgebung Ω von $\sigma(T, E)$ holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt:

$$f(T + Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(T) Q^n.$$

Abgabe bis spätestens <u>Mittwoch, den 23.06.2010</u>, in der Übungsstunde.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`