UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

# Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
## Blatt 10

**Aufgabe 1.** Bezeichne $W$ die *Wieneralgebra* aller $2\pi$-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die eine Darstellung der Form

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{itn} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mit

$$\|f\|_W := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty$$

besitzen. Bezüglich der punktweisen Operationen der Addition, der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren ist $(W, \|\cdot\|_W)$ eine kommutative Banachalgebra. Bestimmen Sie die Menge $\Delta(W)$ aller (nicht trivialen) multiplikativen linearen Funktionale auf $W$.

*Hinweis:* Berechnen Sie zunächst das Spektrum von $e_1$ in $W$ mit $e_1(t) := e^{it}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2.** Sei $W$ wie in Aufgabe 1 und sei $f$ eine Funktion aus $W$. Zeigen Sie:

(a) Hat $f$ keine Nullstellen, so hat auch die Funktion $1/f : z \mapsto 1/f(z)$ eine absolut konvergente Fourierreihenentwicklung.
(b) Ist $g$ eine auf einer offenen Obermenge von $f(\mathbb{R})$ holomorphe Funktion, so ist $g \circ f \in W$.

Im folgenden sei $\mathcal{H}$ stets ein separabler, unendlich dimensionaler komplexer Hilbertraum. Ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ heißt *abschließbar*, falls er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt, d.h., falls es einen abgeschlossenen linearen Operator $S : \mathcal{H} \supseteq D(S) \to \mathcal{H}$ gibt mit $D(T) \subseteq D(S)$ und mit $Sx = Tx$ für alle $x \in D(T)$.

**Aufgabe 3.** Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Zeigen Sie:

(a) $T$ ist genau dann abschließbar, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ von $\mathcal{H}$) in $D(T)$, für die die Bildfolge $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{H}$ gegen einen Vektor $y \in \mathcal{H}$ konvergiert, schon $y = 0$ gilt.
(b) Ist $T$ abschließbar so ist die Abschließung $\overline{G(T)}$ des Graphen von $T$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ wieder Graph eines linearen Operators $\overline{T}$ und für jede abgeschlossene Erweiterung $S$ von $T$ gilt $T \subseteq \overline{T} \subseteq S$. $\overline{T}$ heißt dann die *minimale abgeschlossene Erweiterung* oder auch die *Abschließung von $T$*.

**Aufgabe 4.** Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter linearer Operator. Zeigen Sie:

(a) $\ker(T^*) = \operatorname{ran}(T)^\perp \cap D(T^*)$.
(b) Ist $T$ abgeschlossen, so gilt $\ker(T) = \operatorname{ran}(T^*)^\perp \cap D(T)$.

**Aufgabe$^*$ 5.** Sei $U : \mathcal{H} \supseteq D(U) \to \mathcal{H}$ eine lineare Isometrie. Zeigen Sie: Ist einer der drei Räume $D(U)$, $\operatorname{ran} U$, $G(U)$ abgeschlossen, so gilt dies auch für die beiden anderen.

**Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 30.06.2010, in der Übungsstunde.**

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`