UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 10

Aufgabe 1. Bezeichne W die *Wieneralgebra* aller 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die eine Darstellung der Form

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{itn} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mit

$$\|f\|_W := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty$$

besitzen. Bezüglich der punktweisen Operationen der Addition, der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren ist $(W, \|\cdot\|_W)$ eine kommutative Banachalgebra. Bestimmen Sie die Menge $\Delta(W)$ aller (nicht trivialen) multiplikativen linearen Funktionale auf W.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst das Spektrum von e_1 in W mit $e_1(t) := e^{it}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Sei W wie in Aufgabe 1 und sei f eine Funktion aus W. Zeigen Sie:

(a) Hat f keine Nullstellen, so hat auch die Funktion $1/f : z \mapsto 1/f(z)$ eine absolut konvergente Fourierreihenentwicklung.
(b) Ist g eine auf einer offenen Obermenge von $f(\mathbb{R})$ holomorphe Funktion, so ist $g \circ f \in W$.

Im folgenden sei $\mathcal{H}$ stets ein separabler, unendlich dimensionaler komplexer Hilbertraum. Ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ heißt *abschließbar*, falls er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt, d.h., falls es einen abgeschlossenen linearen Operator $S : \mathcal{H} \supseteq D(S) \to \mathcal{H}$ gibt mit $D(T) \subseteq D(S)$ und mit $Sx = Tx$ für alle $x \in D(T)$.

Aufgabe 3. Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Zeigen Sie:

(a) T ist genau dann abschließbar, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ von $\mathcal{H}$) in $D(T)$, für die die Bildfolge $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{H}$ gegen einen Vektor $y \in \mathcal{H}$ konvergiert, schon $y = 0$ gilt.
(b) Ist T abschließbar so ist die Abschließung $\overline{G(T)}$ des Graphen von T in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ wieder Graph eines linearen Operators $\overline{T}$ und für jede abgeschlossene Erweiterung S von T gilt $T \subseteq \overline{T} \subseteq S$. $\overline{T}$ heißt dann die *minimale abgeschlossene Erweiterung* oder auch die *Abschließung von* T.

Aufgabe 4. Sei $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter linearer Operator. Zeigen Sie:

(a) $\ker(T^*) = \operatorname{ran}(T)^{\perp} \cap D(T^*)$.
(b) Ist T abgeschlossen, so gilt $\ker(T) = \operatorname{ran}(T^*)^{\perp} \cap D(T)$.

Aufgabe* 5. Sei $U : \mathcal{H} \supseteq D(U) \to \mathcal{H}$ eine lineare Isometrie. Zeigen Sie: Ist einer der drei Räume $D(U)$, $\operatorname{ran} U$, $G(U)$ abgeschlossen, so gilt dies auch für die beiden anderen.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 30.06.2010, in der Übungsstunde.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`