UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$h(z) := \frac{z-i}{z+i} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

und sei $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie:

(a) Der Operator $U := h(T)$ ist unitär mit $1 \notin \sigma(U, \mathcal{H})$.
(b) Drücken Sie das Spektralmaß von U durch das von T aus.
(c) Ist umgekehrt $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein unitärer Operator mit $1 \notin \sigma(U, \mathcal{H})$, so gibt es genau einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $h(T) = U$.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Der *Hardy-Raum* $H^2(\mathbb{D})$ ist definiert als

$$H^2(\mathbb{D}) := \Big\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})\,;\, \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} := \sup_{0 \le r < 1} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \Big)^{1/2} < \infty \Big\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|_{H^2(\mathbb{D})}$ ist eine Norm auf $H^2(\mathbb{D})$.
(b) Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Funktion in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$, dann ist $f \in H^2(\mathbb{D})$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ ist und in diesem Fall ist $\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$. Insbesondere ist also $H^2(\mathbb{D})$ isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ und daher ein Hilbertraum.
(c) Zu jedem $z_0 \in \mathbb{D}$ existiert ein $C(z_0) > 0$, so daß $|f(z_0)| \le C(z_0)\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ für alle $f \in H^2(\mathbb{D})$.

Aufgabe 3. Sei $S \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{D}))$ der Shiftoperator, also

$$S : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D}), \qquad (Sf)(z) := zf(z) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Zeigen Sie, daß S die Cayley-Transformierte des symmetrischen Operators

$$T : H^2 \supseteq D(T) \longrightarrow H^2, \qquad (Tf)(z) := i\frac{1+z}{1-z} f(z) \quad (z \in \mathbb{D})$$

ist. T ist maximal symmetrisch und besitzt keine selbstadjungierte Erweiterung.

Aufgabe 4. Der Operator V sei auf $H^2(\mathbb{D})$ definiert als $(Vf)(z) := zf(z^2)$. Zeigen Sie, daß V eine Isometrie ist, welche die Cayley-Transformation eines abgeschlossenen symmetrischen Operators $T : H^2(\mathbb{D}) \supseteq D(T) \to H^2(\mathbb{D})$ ist, dessen Defektindizes 0 und ∞ sind.

Aufgabe* 5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und sei $T : L^2(\Omega) \supseteq C_0^\infty(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein duch

$$(T\phi)(x) := \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x^\alpha}(x) \qquad (\phi \in C_0^\infty(\Omega), x \in \Omega)$$

definierter linearer partieller Differentialoperator mit C^∞-Koeffizienten. Zeigen Sie, dass T abschließbar ist.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 07.07.2010, in der Übungsstunde.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`