UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis 2 (SS 2010)
Blatt 12

Im folgenden sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ ein Hilbertraum. Ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ heißt

- *beschränkt*, falls gilt
$$\operatorname{lub}(T) := \sup\{\|Tx\| \,;\, x \in D(T), \|x\| \le 1\} < \infty\,.$$
- *wesentlich selbstadjungiert*, falls T symmetrisch ist und falls die Bilder von $T \pm i$ dicht in $\mathcal{H}$ liegen.
- *nach unten halbbeschränkt*, falls T symmetrisch ist und falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit
$$\forall x \in D(T) : \langle Tx, x\rangle \ge a\langle x, x\rangle\,.$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Ein symmetrischer Operator $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn seine Abschließung selbstadjungiert ist.

Aufgabe 2. Sei $T : L^2([0,1]) \supseteq D(T) \to L^2([0,1])$ der durch
$$D(T) := \{f \in C^2([0,1])\,;\, f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0\}\,, \quad Tf := -f'' \quad (f \in D(T)),$$
definierte lineare Operator. Zeigen Sie:

(a) T ist nach unten halbbeschränkt.
(b) T ist nicht wesentlich selbstadjungiert.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass alle auf $[0,1]$ zweimal stetig differenzierbare Lösungen der Differentialgleichung
$$y'' - iy = 0$$
orthogonal zu $\operatorname{ran}(T - i)$ sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Ist $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, linearer Operator so gilt $\langle Tx, x\rangle \ge 0$ für alle $x \in D(T)$ genau dann, wenn $\sigma(T) \subseteq [0, \infty]$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Ist $T : \mathcal{H} \supseteq D(T) \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer Operator, zu dem es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $T - a$ injektiv mit dichtem Bild ist und so dass der inverse Operator $(T - a)^{-1} : \mathcal{H} \supseteq \operatorname{ran}(T - a) \to \mathcal{H}$ beschränkt ist, so ist $\operatorname{ran}(T - z)$ dicht in $\mathcal{H}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Insbesondere ist T dann also wesentlich selbstadjungiert.

Hinweis: Sei also $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ beliebig und $x \in \operatorname{ran}(T - z)^{\perp}$. Beachten Sie, dass es nach Voraussetzung zu x eine Folge $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\operatorname{ran}(T - a)$ gibt mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Betrachten Sie das Verhalten von
$$\langle x_n, x_n\rangle + (a - z)\langle x_n, (T - a)^{-1}x_n\rangle$$
für $n \to \infty$.

Aufgabe* 5. Sei $T : L^2(0, \infty) \supseteq D(T) \to L^2(0, \infty)$ definiert durch
$$D(T) := \{f \in C[0, \infty) \cap L^2(0, \infty)\,;\, f' \text{ stückw. stetig}, f(x) = 0 \text{ für alle hinreichend großen } x > 0,\ f(0) = 0\}$$
und
$$Tf := \frac{1}{i}f' \quad \text{für alle } f \in D(T)).$$

Zeigen Sie: T ist ein injektiver, symmetrischer Operator mit dichtem Bild, der nicht selbstadjungiert ist.

Hinweise: Um die Dichtheit von $\operatorname{ran}(T)$ in $L^2(0,\infty)$ zu zeigen, betrachten Sie für $0 < s < t$ die Funktionen $u_{s,t} \in D(T)$ mit

$$u(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < s \\ s & \text{für } s \le x \le t \\ s+t-x & \text{für } t < x < t+s \\ 0 & \text{für } x > t+s \end{cases}$$

und zeigen Sie für $f \in (\operatorname{ran} T)^\perp$ durch Übergang zu $t \to \infty$

$$\int_0^s f(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle } s > 0.$$

Hieraus folgt bekanntlich $f \equiv 0$ fast überall. Zeigen Sie ferner, dass $\operatorname{ran}(T+i)$ nicht dicht liegen kann wegen $\exp \in \operatorname{ran}(T+i)^\perp$.

Dieses Beispiel zeigt, dass man in Aufgabe 4 nicht auf die Beschränktheitsforderung verzichten kann.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, den 14.07.2010, in der Übungsstunde.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ss10/fa2/uebungen.html`