UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)
Blatt 10

Aufgabe 1. Bei Umkehrfunktionen f^{-1} kennt man wegen des Satzes 2.25 über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion häufig deren Ableitung besser als f^{-1} selbst. Satz 3.4 der Vorlesung über die partielle Integration legt daher den folgenden Ansatz nahe:

$$\int_a^b f^{-1}(t)dt = t \cdot f^{-1}(t)\Big|_a^b - \int_a^b t \cdot (f^{-1})'(t)dt\,.$$

Berechnen Sie nach dieser Methode die Integrale

$$(a) \quad \int_a^b \log(x)\,dx \qquad (0 < a < b) \qquad (b) \quad \int_a^b \arctan(x)\,dx \qquad (-\infty < b < \infty).$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie für $\alpha > 1$ das bei ∞ uneigentliche Integral

$$\int_e^\infty \frac{1}{t\ln(t)^\alpha}\,dt$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst mit Hilfe einer geeigneten Substitution für $x > e$ das Integral

$$\int_e^x \frac{1}{t\ln(t)^\alpha}\,dt$$

und führen Sie anschließend den Grenzübergang für $x \to \infty$ durch.

Aufgabe 3. Ein biologisches System habe (als Funktion der Zeit t) den Eingang $x(t) \geq 0$ und den Ausgang $y(t)$. Die Empfindlichkeit E hänge nur vom Eingang (also nicht explizit von der Zeit t ab), d.h. es gelte

$$y'(t) = E(x(t))x'(t)\,.$$

Hierbei sei die Funktion $t \mapsto x(t)$ stetig differenzierbar und $E : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur nicht negative Werte annimmt. Ferner gelte

$$x(t) = 0 = y(t_0) \quad \text{für } t \leq t_0 \quad \text{und } x(t) = x_1 \quad \text{für } t \geq t_1\,.$$

(a) Berechnen Sie (formelmäßig) $y(t)$ für $t \geq t_1$.

(b) Berechnen Sie $y(t)$ für $t \geq t_1$ in dem Spezialfall $E(x) = b(1 + ax)^{-1}$ $(a, b > 0)$.

Aufgabe* 4. Sei

$$T_0 := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |\mathrm{Re}\, z| \leq 1 \text{ und } 0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 2\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter

$$T_n := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |\mathrm{Re}\, z| \leq 8 + n - \mathrm{Im}\, z \text{ und } 2n \leq \mathrm{Im}\, z \leq 8 + n\}.$$

Skizzieren Sie - möglichst vor dem 24.12.2006 - die Menge $T := \bigcup_{n=0}^\infty T_n$.
(Schmücken erwünscht!)

Abgabe: Mittwoch, 10.01.2007 von 14:00 bis 14:10 Uhr im Hörsaal der Vorlesung oder bis 14:10 Uhr in dem mit *Mathe für Biologen WS 06/07* gekennzeichneten Briefkasten am unteren Eingang des Hörsaalgebäudes der Mathematik (Gebäude E 2 5).
Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/MfB-LA-C/MBLAC-ueb.html`.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und alles Gute für 2007!