UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07) Blatt 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen: (a) sinh (b) cosh (c) tanh

Aufgabe 2. Das Wachstumsverhalten von Populationen mit beschränktem Lebensraum wird häufig durch Funktionen der Gestalt

$$P(t) = \frac{B}{1 + ce^{-\lambda B t}} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

beschrieben. Hierbei ist $B > 0$ die Grenzgröße der Population, die nicht überschritten werden kann, und λ eine von der speziellen Population abhängige positive Konstante. Die Konstante $c > 0$ kann aus der Größe der Population zu einer Anfangszeit t_0 berechnet werden.
(a) Berechnen Sie die Konstante c für den Fall, dass die Anfangspopulation $P(0)$ zur Zeit $t = 0$ mit $B/10000$ übereinstimmt.
(b) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} P(t) \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to-\infty} P(t)\,.$$

(c) Zeigen Sie, daß die Funktion P der Gleichung

$$P'(t) = \lambda P(t)(B - P(t)) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

genügt. $P'(t)$ ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Population zur Zeit t.

Aufgabe 3. (a) Seien λ und B zwei positive Konstanten. Die nach unten geöffnete Parabel $y = \lambda x(B - x)$, $(x \in \mathbb{R})$, nimmt bekanntlich ihr Maximum in ihrem Scheitelpunkt an. Berechnen Sie diesen.
(b) Berechnen Sie Zeitpunkt und Größe der maximalen momentanen Wachstumsgeschwindigkeit in der Situation von Aufgabe 2 (a).

Aufgabe* 4. Sei $N(t)$ die Anzahl der Kerne einer radioaktiven Substanz zur Zeit t. Der Zerfall der radioaktiven Substanz wird beschrieben durch $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Hierbei ist $\lambda > 0$ die von der Substanz abhängige Zerfallskonstante und N_0 die Anzahl der radioaktiven Atome zur Anfangszeit $t = 0$. Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist die Zeitspanne, in der die Anzahl der Atome der radioaktiven Substanz auf die Hälfte des Wertes zu Beginn der Beobachtung abgenommen hat.
(a) Berechnen Sie die Halbwertszeit als Funktion von λ.
(b) Drücken Sie umgekehrt die Zerfallskonstante λ durch die Halbwertszeit $T_{1/2}$ aus und geben Sie $N(t)$ als Funktion von t und $T_{1/2}$ an.
(c) Zeigen Sie, daß die relative momentane Abnahme $-N'(t)/N(t)$ konstant ist. Geben Sie diese Konstante an.

Abgabe: Mittwoch, 06.12.2006 von 14:00 bis 14:10 Uhr im Hörsaal der Vorlesung oder bis 14:10 Uhr in dem mit *Mathe für Biologen WS 06/07* gekennzeichneten Briefkasten am unteren Eingang des Hörsaalgebäudes der Mathematik (Gebäude E 2 5).

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/MfB-LA-C/MBLAC-ueb.html`.