UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1. (a) Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ bzw. des Produktzeichens $\prod$ die Ausdrücke
(i) $2+4+6+8+10+12+14+16+18$
(ii) $1-3+9-27+81$
(iii) $2006!$.
(b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

mit Hilfe des binomischen Satzes.

Lösung: (a) Es gilt für (i):

$$2+4+6+8+10+12+14+16+18 = \sum_{n=1}^{9} 2n\,,$$

für (ii):

$$1-3+9-27+81 = \sum_{n=0}^{4} (-3)^n$$

und für (iii):

$$2006! = \prod_{n=1}^{2006} n\,.$$

(b) Nach dem binomischen Satz gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,.$$

Wählen wir speziell $a = b = 1$, so folgt:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,.$$

□

Aufgabe 2. Geben Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen an:

(a) $2x^2 - 8x + 6 = 0$,
(b) $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$,
(c) $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Lösung: (a) Die angegebene Gleichung ist äquivalent zu der Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_1 = 2 + \sqrt{2^2 - 3} = 3$ und $x_2 = 2 - \sqrt{2^2 - 3} = 1$.

(b) Durch Einsetzen sieht man, daß $x_1 = 3$ eine Lösung der Gleichung ist. Durch Polynomdivision rechnet man nach:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^3 & +4x^2 & -9x & -36 & = x^2+7x+12 \\
x^3 & -3x^2 & & & \\
\hline
 & 7x^2 & -9x & & \\
 & 7x^2 & -21x & & \\
\hline
 & & 12x & -36 & \\
 & & 12x & -36 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Es gilt also $x^3+4x^2-9x-36=(x-3)(x^2+7x+12)$. Für die noch zu berechnenden Nullstellen von $x^2+7x+12$ erhalten wir

$$x_{2/3}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-12}\,,$$

d.h. $x_2=-3$ und $x_3=-4$. Die Lösungen der Gleichung sind also: $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=-4$. Da ein Polynom vom Grad 3 höchstens 3 Lösungen haben kann, sind dies alle Lösungen.

(c) Die angegebene Gleichung ist äquivalent zu $(x+1)^2=-1$ hat also keine reellen Lösungen, da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann.

Aufgabe 3. Lösen Sie die folgenden Differenzengleichungen

(a) $x_{n+2}=4x_{n+1}-3x_n$,
(b) $x_{n+2}=4x_{n+1}-4x_n$.

Lösung: (a) Die Differenzengleichung schreiben wir in ihrer Normalform

$$x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=0\,.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet also:

$$\lambda^2-4\lambda+3\lambda=0\,.$$

Sie hat die Lösungen $\lambda_1=3$ und $\lambda_2=1$. Gemäß Satz 1.4 der Vorlesung ist die die Lösungsgesamtheit $\mathbb{L}$ der gegebenen Differenzengleichung also gegeben durch

$$\mathbb{L}=\{(\alpha 3^n+\beta 1^n)_{n=0}^{\infty}\,;\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha 3^n+\beta)_{n=0}^{\infty}\,;\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

(b) Die Differenzengleichung lautet in Normalform

$$x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0\,.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

hat die doppelte reelle Lösung $\lambda=2$. Nach Satz 1.4 der Vorlesung ist also die Lösungsgesamtheit der gegebenen Differenzengleichung gegeben durch:

$$\mathbb{L}=\{(\alpha 2^n+\beta n2^n)_{n=0}^{\infty}\,;\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\,.$$

□

Aufgabe 4. Wieviele Fachkombinationen mit zwei unterschiedlichen Fächern gibt es für das Lehramtsstudium, wenn 20 Fächer insgesamt angeboten werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Nach Satz 0.30 in dem vorbereitenden Kapitel 0 der Vorlesung ist die Anzahl n der Möglichkeiten aus 20 verschiedenen Fächern zwei auszuwählen

$$n=\binom{20}{2}=\frac{20\cdot 19}{2}=190\,.$$

□