UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1. (a) Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ bzw. des Produktzeichens $\prod$ die Ausdrücke
(i) $2+4+6+8+10+12+14+16+18$
(ii) $1-3+9-27+81$
(iii) $2006!$.
(b) Berechnen Sie
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$
mit Hilfe des binomischen Satzes.

Lösung: (a) Es gilt für (i):
$$2+4+6+8+10+12+14+16+18=\sum_{n=1}^{9}2n\,,$$
für (ii):
$$1-3+9-27+81=\sum_{n=0}^{4}(-3)^n$$
und für (iii):
$$2006!=\prod_{n=1}^{2006}n\,.$$
(b) Nach dem binomischen Satz gilt für alle $a,b\in\mathbb{R}$
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\,.$$
Wählen wir speziell $a=b=1$, so folgt:
$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,.$$
□

Aufgabe 2. Geben Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen an:

(a) $2x^2-8x+6=0$,
(b) $x^3+4x^2-9x-36=0$,
(c) $x^2+2x+2=0$.

Lösung: (a) Die angegebene Gleichung ist äquivalent zu der Gleichung $x^2-4x+3=0$ mit den beiden Lösungen $x_1=2+\sqrt{2^2-3}=3$ und $x_2=2-\sqrt{2^2-3}=1$.

(b) Durch Einsetzen sieht man, daß $x_1=3$ eine Lösung der Gleichung ist. Durch Polynomdivision rechnet man nach:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^3 & +4x^2 & -9x & -36 & = x^2+7x+12 \\
x^3 & -3x^2 & & & \\ \hline
 & 7x^2 & -9x & & \\
 & 7x^2 & -21x & & \\ \hline
 & & 12x & -36 & \\
 & & 12x & -36 & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Es gilt also $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = (x-3)(x^2 + 7x + 12)$. Für die noch zu berechnenden Nullstellen von $x^2 + 7x + 12$ erhalten wir

$$x_{2/3} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12}\,,$$

d.h. $x_2 = -3$ und $x_3 = -4$. Die Lösungen der Gleichung sind also: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -4$. Da ein Polynom vom Grad 3 höchstens 3 Lösungen haben kann, sind dies alle Lösungen.

(c) Die angegebene Gleichung ist äquivalent zu $(x+1)^2 = -1$ hat also keine reellen Lösungen, da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann.

Aufgabe 3. Lösen Sie die folgenden Differenzengleichungen

(a) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$,
(b) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$.

Lösung: **(a)** Die Differenzengleichung schreiben wir in ihrer Normalform

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0\,.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet also:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3\lambda = 0\,.$$

Sie hat die Lösungen $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$. Gemäß Satz 1.4 der Vorlesung ist die die Lösungsgesamtheit $\mathbb{L}$ der gegebenen Differenzengleichung also gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{(\alpha 3^n + \beta 1^n)_{n=0}^{\infty}\,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha 3^n + \beta)_{n=0}^{\infty}\,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

(b) Die Differenzengleichung lautet in Normalform

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0\,.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

hat die doppelte reelle Lösung $\lambda = 2$. Nach Satz 1.4 der Vorlesung ist also die Lösungsgesamtheit der gegebenen Differenzengleichung gegeben durch:

$$\mathbb{L} = \{(\alpha 2^n + \beta n 2^n)_{n=0}^{\infty}\,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

□

Aufgabe 4. Wieviele Fachkombinationen mit zwei unterschiedlichen Fächern gibt es für das Lehramtsstudium, wenn 20 Fächer insgesamt angeboten werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Nach Satz 0.30 in dem vorbereitenden Kapitel 0 der Vorlesung ist die Anzahl n der Möglichkeiten aus 20 verschiedenen Fächern zwei auszuwählen

$$n = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190\,.$$

□