



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie
(WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 10

Aufgabe 1. Bei Umkehrfunktionen f^{-1} kennt man wegen des Satzes 2.25 über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion häufig deren Ableitung besser als f^{-1} selbst. Satz 3.4 der Vorlesung über die partielle Integration legt daher den folgenden Ansatz nahe:

$$\int_a^b f^{-1}(t) dt = t \cdot f^{-1}(t) \Big|_a^b - \int_a^b t \cdot (f^{-1})'(t) dt.$$

Berechnen Sie nach dieser Methode die Integrale

$$(a) \int_a^b \ln(x) dx \quad (0 < a < b) \quad (b) \int_a^b \arctan(x) dx \quad (-\infty < b < \infty).$$

Lösung: (a) Es ist $\ln = \exp^{-1}$ mit $\ln'(t) = \frac{1}{t}$ für alle $t > 0$. Also liefert die in der Aufgabenstellung geschilderte Methode:

$$\int_a^b \ln(t) dt = t \cdot \ln(t) \Big|_a^b - \int_a^b t \cdot \ln'(t) dt = b \ln(b) - a \ln(a) - \int_a^b 1 dt = \ln\left(\frac{b^b}{a^a}\right) - b + a.$$

(b) Nach Beispiel (a) zu Satz 2.25 gilt $\arctan'(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Mit der Methode der Aufgabenstellung folgt also:

$$\begin{aligned} \int_a^b \arctan(x) dx &= x \cdot \arctan(x) \Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \arctan'(x) dx \\ &= b \arctan(b) - a \arctan(a) - \int_a^b x \cdot (1 + x^2)^{-1} dx \\ &= b \arctan(b) - a \arctan(a) - \frac{1}{2} \ln(1 + b^2) + \frac{1}{2} \ln(1 + a^2) \\ &= b \arctan(b) - a \arctan(a) + \ln\left(\sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + b^2}}\right), \end{aligned}$$

da die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ eine Stammfunktion zu $x \mapsto x(1 + x^2)^{-1}$ ist (vergl. auch die Lösung zu Aufgabe 1 (c) von Blatt 9). $\square$

Aufgabe 2. Berechnen Sie für $\alpha > 1$ das bei ∞ uneigentliche Integral

$$\int_e^\infty \frac{1}{t \ln(t)^\alpha} dt$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst mit Hilfe einer geeigneten Substitution für $x > e$ das Integral

$$\int_e^x \frac{1}{t \ln(t)^\alpha} dt$$

und führen Sie anschließend den Grenzübergang für $x \rightarrow \infty$ durch.

Lösung: Wir wenden die Substitutionsregel an mit $\varphi = \ln$, $f(y) = y^{-\alpha}$ und erhalten (unter Verwendung von $\ln(e) = 1$) für $x \rightarrow \infty$:

$$\int_e^x \frac{1}{t \ln(t)^\alpha} dt = \int_e^x \ln'(t) \cdot \frac{1}{\ln(t)^\alpha} dt = \int_{\ln(e)}^{\ln(x)} y^{-\alpha} dy = \frac{\ln(x)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{1 - \ln(x)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \rightarrow \frac{1}{\alpha-1},$$

da $\ln(x)^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)^{\alpha-1} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ wegen $(\ln(x))^{-1} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ und wegen $\alpha - 1 > 0$. Es gilt also

$$\int_e^\infty \frac{1}{t \ln(t)^\alpha} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_e^x \frac{1}{t \ln(t)^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

□

Aufgabe 3. Ein biologisches System habe (als Funktion der Zeit t) den Eingang $x(t) \geq 0$ und den Ausgang $y(t)$. Die Empfindlichkeit E hänge nur vom Eingang (also nicht explizit von der Zeit t ab), d.h. es gelte

$$y'(t) = E(x(t))x'(t).$$

Hierbei sei die Funktion $t \mapsto x(t)$ stetig differenzierbar und $E : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur nicht negative Werte annimmt. Ferner gelte

$$x(t) = 0 = y(t_0) \quad \text{für } t \leq t_0 \quad \text{und } x(t) = x_1 \quad \text{für } t \geq t_1.$$

(a) Berechnen Sie (formelmäßig) $y(t)$ für $t \geq t_1$.

(b) Berechnen Sie $y(t)$ für $t \geq t_1$ in dem Spezialfall $E(x) = b(1 + ax)^{-1}$ ($a, b > 0$).

Lösung: (a) Da $x(t)$ nach Voraussetzung auf $[t_1, \infty)$ konstant ist, dort also $x'(t) \equiv 0$ erfüllt, folgt $y'(t) = 0$ für alle $t \geq t_1$. Also ist $y(t)$ auf $[t_1, \infty)$ konstant. Wegen $y'(t) = E(x(t))x'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ muß y eine Stammfunktion zu $t \mapsto E(x(t))x'(t)$ sein. Wegen $x(t_0) = y(t_0) = 0$ folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung der Substitutionsregel (mit $\varphi(t) = x(t)$ und $F = E$) für alle $t \geq t_1$:

$$y(t) = y(t_1) = y(t_1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} E(x(t))x'(t) dt = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} E(x) dx = \int_0^{x_1} E(x) dx.$$

(b) Ist $E(x) = b(1 + ax)^{-1}$ mit positiven Konstanten a und b , so folgt nach Teil (a) für alle $t \geq t_1$:

$$y(t) = \int_0^{x_1} E(x) dx = \int_0^{x_1} b(1 + ax)^{-1} dx = \frac{b}{a} \ln(1 + ax_1) - \frac{b}{a} \ln(1 + a0) = \frac{b}{a} \ln(1 + ax_1).$$

□

Aufgabe* 4. Sei

$$T_0 := \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re} z| \leq 1 \text{ und } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter

$$T_n := \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re} z| \leq 8 + n - \operatorname{Im} z \text{ und } 2n \leq \operatorname{Im} z \leq 8 + n\}.$$

Skizzieren Sie - möglichst vor dem 24.12.2006 - die Menge $T := \bigcup_{n=0}^\infty T_n$.
(Schmücken erwünscht!)

Lösung: T_0 ist das Quadrat in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ mit den Eckpunkten

$$-1, \quad 1, \quad 1 + i, \quad -1 + i.$$

Für $1 \leq n \leq 7$ ist T_n das gleichschenklige Dreieck mit den Eckpunkten

$$n - 8 + 2ni, \quad 8 - n + 2ni, \quad (8 + n)i.$$

T_8 enthält nur den Punkt $16i$.

Für $n > 8$ gibt es keine $z \in \mathbb{C}$ mit $2n \leq \operatorname{Im} z \leq 8 + n$, d.h. es gilt $T_n = \emptyset$ für alle $n > 8$.
Damit ergibt sich folgendes Bild:

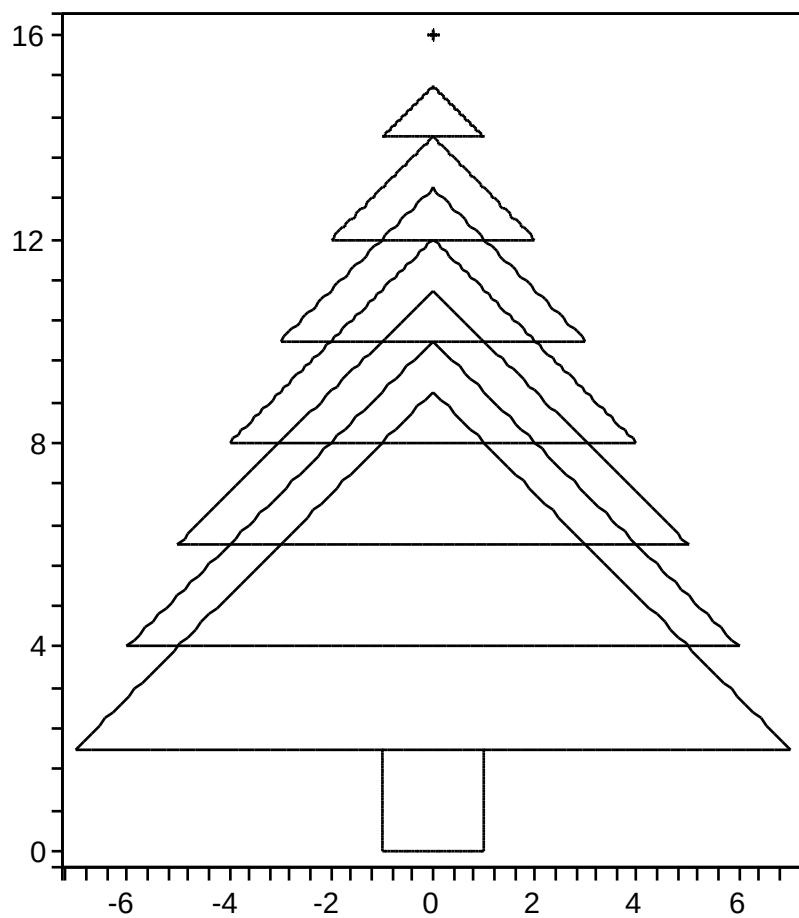


ABBILDUNG 1. Zu Aufgabe 4 (Abies mathematica).