



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie
(WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 11

Aufgabe 1. Für $T > 0$ sei $\gamma_T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ der durch

$$\gamma_T(t) := (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t)) \quad (0 \leq t \leq T)$$

gegebene Weg. Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma_T)$ von γ_T . Existiert der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} L(\gamma_T)?$$

Lösung: Nach 3.9 in der Vorlesung gilt für die Weglänge:

$$(1) \quad L(\gamma_T) = \int_0^T |\gamma'_T(t)| dt = \int_0^T (\gamma'_{T,1}(t)^2 + \gamma'_{T,2}(t)^2)^{1/2} dt,$$

mit $\gamma_{T,1}(t) = e^{-t} \cos(t)$ und $\gamma_{T,2}(t) = e^{-t} \sin(t)$. Mit der Produktregel berechnen wir

$$\gamma'_{T,1}(t) = -e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)),$$

$$\gamma'_{T,2}(t) = e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \gamma'_{T,1}(t)^2 + \gamma'_{T,2}(t)^2 &= e^{-2t}((\cos(t) + \sin(t))^2 + (\cos(t) - \sin(t))^2) \\ &= e^{-2t}2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2) = 2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in Gleichung (1) ein, so folgt

$$L(\gamma_T) = \int_0^T (\gamma'_{T,1}(t)^2 + \gamma'_{T,2}(t)^2)^{1/2} dt = \int_0^T \sqrt{2}e^{-t} dt = \sqrt{2}(1 - e^{-T}).$$

Für $T \rightarrow \infty$ folgt also $L(\gamma_T) = \sqrt{2}(1 - e^{-T}) \rightarrow \sqrt{2}$. □

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Länge des Graphen der durch

$$f(x) := x^{3/2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

gegebenen Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösung: Nach Beispiel 3.10 (c) der Vorlesung gilt für die Länge L des Graphen von f :

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Wegen $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$ für alle $x \geq 0$ folgt

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

Eine Stammfunktion zu $x \mapsto \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$ ist die Funktion $x \mapsto \frac{8}{27}(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2}$. Also folgt

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{27}(13^{3/2} - 8).$$

□

Aufgabe 3. Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

$$(a) \quad y' = 1 + y^2 \quad (b) \quad y' = y^2 \quad (c) \quad y' = xy \quad (d) \quad y' = \ln(x).$$

Lösung: Bei (a), (b) und (c) liegen jeweils Differentialgleichungen der Form $y' = h(y)g(x)$ mit getrennten Variablen vor. Unter Verwendung von (4) gilt für alle Lösungen $x \mapsto y(x)$ dieser Differentialgleichungen in allen Intervallen I mit $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$:

$$(2) \quad F(y(x)) = G(x) + C \quad (x \in I),$$

wobei F eine Stammfunktion zu $1/h$, G eine Stammfunktion zu g und $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Zu (a) In diesem Fall ist $h(y) = 1 + y^2 \geq 1 > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ von 0 verschieden. Nach Beispiel (a) zu Satz 2.25 der Vorlesung ist $\arctan$ eine Stammfunktion zu $1/h$. Mit (2) erhalten wir also für die gesuchten Lösungen

$$\arctan(y(x)) = x + C.$$

Wenden wir auf diese Gleichung den $\tan$ an, so folgt: $y(x) = \tan(x + C)$. Wegen

$$1 + y(x)^2 = 1 + \frac{\sin(x + C)^2}{\cos(x + C)^2} = \frac{\cos(x + C)^2 + \sin(x + C)^2}{\cos(x + C)^2} = \frac{1}{\cos(x + C)^2} = y'(x)$$

ist tatsächlich für alle Konstanten $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto \tan(x + C)$ eine Lösung zu (a) auf allen Intervallen I mit $I \cap \{\frac{\pi}{2} - C + n\pi; n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$.

Zu (b): Die Funktion $y(x) \equiv 0$ ist offensichtlich eine Lösung zu (b) mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Hier ist $h(y) = y^2$. Für alle Lösungen $x \mapsto y(x)$ mit $y(x) \neq 0$ auf einem Intervall I gilt also nach (2):

$$-\frac{1}{y(x)} = x + C \quad (x \in I)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Also folgt

$$y(x) = \frac{-1}{x + C} \quad (x \in I).$$

Umgekehrt ist für jedes $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto \frac{-1}{x+C}$ eine Lösung zu (b) auf jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $-C \notin I$.

Zu (c): Hier ist $h(y) = y$ und $g(x) = x$. Offensichtlich ist $y \equiv 0$ eine Lösung zu (c). Für alle Lösungen $x \mapsto y(x)$ mit $y(x) \neq 0$ auf einem Intervall I gilt also nach (2):

$$(3) \quad \ln(|y(x)|) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (x \in I)$$

mit einer reellen Konstanten C . Wegen $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und der Stetigkeit von $x \mapsto y(x)$ auf I folgt nach dem Zwischenwertsatz: $x \mapsto y(x)$ hat auf I keinen Vorzeichenwechsel. Ist also $y(x) > 0$ auf I , so folgt aus (3) durch Übergang zur Exponentialfunktion

$$y(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = ce^{x^2/2} \quad (x \in I)$$

mit der positiven Konstante $c = e^C$. Ist $y(x) < 0$ auf I , so folgt aus (3)

$$y(x) = -\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = ce^{x^2/2} \quad (x \in I)$$

mit der negativen Konstante $c = -e^C$. Umgekehrt ist für alle $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto ce^{x^2/2}$ auf ganz $\mathbb{R}$ (und damit auch auf jedem Teilintervall von $\mathbb{R}$) eine Lösung von (c).

Zu (d): Lösungen zu (d) sind alle Stammfunktionen von $x \mapsto \ln(x)$ also alle Funktionen $x \mapsto x \ln(x) - x + C$ mit reellen Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Der maximale Definitionsbereich ist hier $(0, \infty)$. $\square$

Aufgabe* 4. Zeichnen Sie die Richtungsfelder zu den folgenden Differentialgleichungen in dem Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$

$$(a) \quad y' = xy \quad (b) \quad y' = y - x.$$

Zeichnen Sie in das Richtungsfeld zu (a) einige der in Aufgabe 3 (b) gefundenen Lösungen ein.

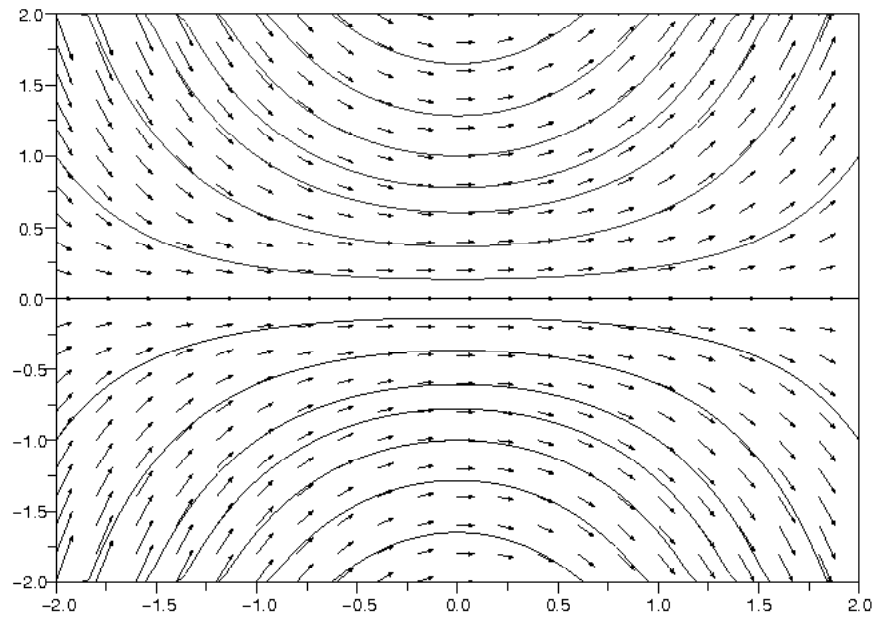


ABBILDUNG 1. Zu Aufgabe 4 (a). Eingefügt sind die positiven und die negativen Lösungen mit den Konstanten $C = 1/4, 1/2, 0, -1/4, -1/2, -1, -2$ sowie die identisch verschwindende Lösung.

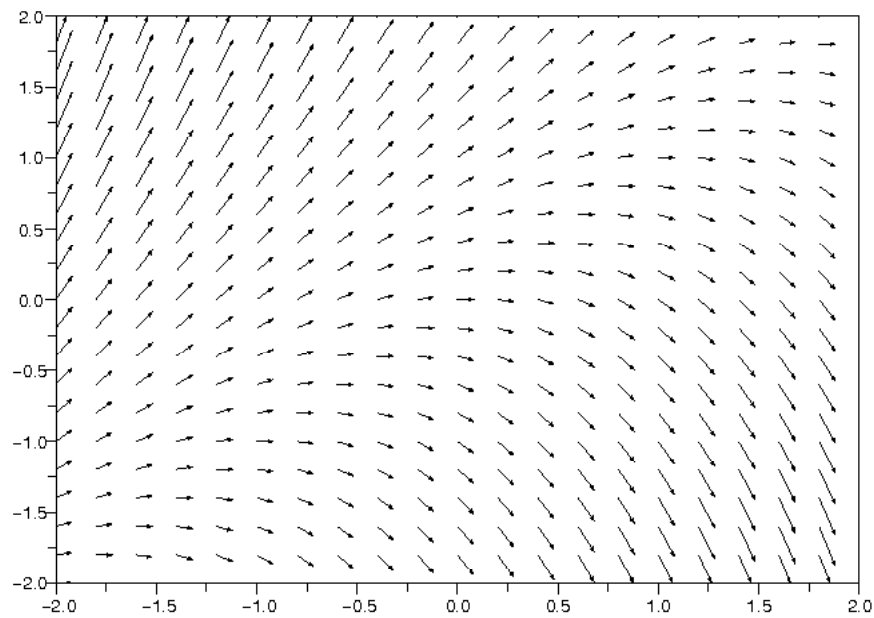


ABBILDUNG 2. Richtungsfeld zu Aufgabe 4 (b).