



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie
(WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 12

Aufgabe 1. Gegeben sei eine zerfallende Population mit Zerfallskonstante $a < 0$.

(a) Es liegt zusätzlich konstante Abwanderung $b < 0$ vor, so daß die Population $y(t)$ zunächst der Differentialgleichung

$$y' = ay + b$$

genügt. Die Population zur Zeit $t = t_0$ sei $y(t_0) = y_0 > 0$. Wann ist diese Population ausgestorben?

(b) Es liege nun konstante Zuwanderung $b > 0$ vor. Was können Sie jetzt über die Entwicklung der Population bei einer Anfangspopulation $y(t_0) = y_0 > 0$ aussagen? Was passiert für $t \rightarrow \infty$? Unter welchen Bedingungen ist die Population streng monoton wachsend bzw. streng monoton abnehmend bzw. konstant?

Lösung: Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung (mit dem konstanten Koeffizienten a) mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$. Für die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y' = ay$ erhält man nach Formel (12) in 4.5 der Vorlesung:

$$y_C(t) = C \exp \left(\int_{t_0}^t a \, ds \right) = C e^{a(t-t_0)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

wobei die reellen Konstanten $\mathbb{R}$ durchlaufen. Eine spezielle Lösung ist die konstante Funktion $t \mapsto \varphi(t) = -\frac{b}{a}$. Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich daher nach 4.5 der Vorlesung die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ t \mapsto -\frac{b}{a} + C e^{a(t-t_0)}; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die Lösung mit $y(t_0) = y_0 > 0$ muß also gelten: $y_0 = y(t_0) = -\frac{b}{a} + C$ und somit $C = y_0 + \frac{b}{a}$. Die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = ay + b$ mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0 > 0$ für $t > t_0$ lautet also

$$(1) \quad y(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}, \quad (t > t_0).$$

Zu (a): Die Population ist zu dem Zeitpunkt $t_1 > t_0$ ausgestorben, zu dem $y(t_1) = 0$ ist. Aus der Gleichung

$$0 = y(t_1) = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(t_1-t_0)} - \frac{b}{a}$$

erhalten wir

$$\left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(t_1-t_0)} = \frac{b}{a}$$

und hieraus durch Übergang zum Logarithmus

$$\ln \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) + a(t_1 - t_0) = \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Auflösung nach t_1 ergibt (unter Verwendung von $|a| = -a$ und $|b| = -b$):

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{b}{a(y_0 + \frac{b}{a})} \right) = t_0 + \frac{1}{|a|} \ln \left(\frac{|a|y_0 + |b|}{|b|} \right).$$

Zu diesem Zeitpunkt ist also die Population ausgestorben.

Zu (b): Ist $y_0 = \frac{b}{|a|} = -\frac{b}{a}$, so erhalten wir die konstante Lösung $t \mapsto \frac{b}{|a|} = -\frac{b}{a}$ und die Population bleibt konstant.

Ist $y_0 < \frac{b}{|a|} = -\frac{b}{a}$ also $y_0 + \frac{b}{a} < 0$, so folgt für alle $t \geq t_0$ aus (1):

$$y'(t) = a\left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} = |a| \cdot \left|y_0 + \frac{b}{a}\right|e^{a(t-t_0)} > 0.$$

Die Population ist also monoton wachsend. Für $t \rightarrow \infty$ folgt $e^{a(t-t_0)} \rightarrow 0$ wegen $a < 0$ und damit

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{|a|}.$$

Die Population konvergiert monoton wachsend gegen den Wert der konstanten Lösung.

Ist schließlich $y_0 > \frac{b}{|a|} = -\frac{b}{a}$ also $y_0 + \frac{b}{a} > 0$, so folgt für alle $t \geq t_0$ aus (1):

$$y'(t) = a\left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} = -|a| \cdot \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} < 0.$$

Die Population ist also monoton fallend. Für $t \rightarrow \infty$ folgt $e^{a(t-t_0)} \rightarrow 0$ wegen $a < 0$ und damit

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{|a|}.$$

Die Population konvergiert monoton fallend gegen den Wert der konstanten Lösung. $\square$

Aufgabe 2. Einer Bakterienkultur mit der Wachstumskonstante $a > 0$ werde ein Giftstoff zugesetzt. Die hierdurch verursachte momentane Abnahme zur Zeit t sei proportional zu t und $y(t)$, so daß sich die Differentialgleichung

$$y' = ay - bty$$

mit einer Konstanten $b > 0$ ergibt. Geben Sie die Lösung $t \mapsto y(t)$ der Differentialgleichung mit $y(t_0) = y_0 > 0$ an. Wachsen die Bakterien unbegrenzt oder sterben sie zu einem Zeitpunkt $t_1 > t_0$ aus?

Lösung: Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$. Nach Formel (13) in 4.5 der Vorlesung ist die Lösung gegeben durch

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a - bs \, ds\right) = y_0 \exp\left(a(t - t_0) - \frac{b}{2}(t^2 - t_0^2)\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere ist also die Population immer positiv und stirbt daher nicht zu einer endlichen Zeit $t > t_0$ aus. Aus der Differentialgleichung folgt wegen $y(t) > 0$: Für $t < \frac{a}{b}$ ist $y'(t) = (a - bt)y(t) > 0$ und für $t > \frac{a}{b}$ ist $y'(t) = (a - bt)y(t) < 0$, d.h. y ist auf $(-\infty, \frac{a}{b})$ streng monoton wachsend, auf $(\frac{a}{b}, \infty)$ streng monoton fallend und nimmt für $t = \frac{a}{b}$ sein Maximum an. Für $t \rightarrow \infty$ gilt $a(t - t_0) - \frac{b}{2}(t^2 - t_0^2) \rightarrow -\infty$ und es folgt

$$y(t) = y_0 \exp\left(a(t - t_0) - \frac{b}{2}(t^2 - t_0^2)\right) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Die Bakterienkultur wird also immer kleiner, die Population geht gegen 0, stirbt aber nie ganz aus. $\square$

Aufgabe 3. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = y + e^x$ an.

Lösung: Es handelt sich um eine inhomogen lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit dem konstanten Koeffizienten $a = 1$ und $b(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese hat nach 4.8 der Vorlesung die allgemeine Lösung (mit $x_0 = 0$):

$$y_C(x) = Ce^x + \int_0^x e^t e^{x-t} dt = (C + x)e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Hierbei durchläuft die Konstante C alle reellen Zahlen. $\square$

Aufgabe* 4. Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = y + \frac{e^x}{x}$ mit $y(1) = 1$ an.

Lösung: Es handelt sich um eine inhomogen lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit dem konstanten Koeffizienten $a = 1$ und $b(x) = e^x/x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Diese hat nach 4.8 der Vorlesung die allgemeine Lösung (mit $x_0 = 1$):

$$y_C(x) = Ce^{x-1} + \int_1^x \frac{e^t}{t} e^{x-t} dt = Ce^{x-1} + e^x \int_1^x \frac{1}{t} dt = \left(\frac{C}{e} + \ln(x) \right) e^x \quad (x > 0).$$

Wegen $y_C(1) = C$ ist die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ nur für $C = 1$ erfüllt. Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$y(x) = (e^{-1} + \ln(x))e^x, \quad (x > 0).$$

□