UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)

Lösungen zu Blatt 13

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Differentialgleichung

$$y' = ty + e^{t^2/2}.$$

Wie lautet die Lösung y mit $y(0) = 1$?

Lösung: Es handelt sich um eine inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung (mit $a(t) = t$ und $b(t) = e^{t^2/2}$). Mit Variation der Konstanten erhält man nach Formel (18) der Vorlesung (am Ende von 4.7) mit $t_0 = 0$ und $y_0 = y(0)$:

$$\begin{aligned} y(t) = & \left[y_0 + \int_0^t e^{\tau^2/2} \exp\Big(-\int_0^\tau s\,ds \Big)\,d\tau \right] \exp\Big(\int_0^t \tau\,d\tau \Big) \\ = & y_0 e^{t^2/2} + \int_0^t e^{\tau^2/2} e^{-\tau^2/2}\,d\tau\, e^{t^2/2} = y_0 e^{t^2/2} + t e^{t^2/2} \\ = & (y_0 + t) e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Die Lösungsgesamtheit ist also

$$\mathbb{L} = \left\{ t \mapsto (y_0 + t) e^{t^2/2} \,;\, y_0 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die spezielle Lösung y mit $y(0) = 1$ ist somit gegeben durch

$$y(t) = (1 + t) e^{t^2/2}.$$

□

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Für welche Lösungen y gilt $y(x) \to 0$ für $x \to \infty$?

Lösung: Es handelt sich um eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$. Diese sind reell und voneinander verschieden. Nach Satz 4.10 der Vorlesung ist die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung also gegeben durch

$$\mathbb{L}_h = \{ x \mapsto c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \,;\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Wegen $e^x \to \infty$ und $e^{-2x} \to 0$ für $x \to \infty$ gilt für die Lösungen

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

die Aussage $y(x) \to 0$ genau dann, wenn $c_1 = 0$, d.h. wenn y von der Gestalt

$$x \mapsto c_2 e^{-2x}, (x \in \mathbb{R})$$

mit einer reellen Konstanten c_2. □

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 4y = 0.$$

Lösung: Es handelt sich um eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

und hat die komplexen Lösungen $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Nach Satz 4.12 der Vorlesung ist die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung also gegeben durch

$$\mathbb{L}_h = \{x \mapsto c_1 e^x \cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^x \sin(\sqrt{3}x)\,;\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

□

Aufgabe* 4. Bestimmen Sie alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - 4y = e^{-x}\,.$$

Verwenden Sie zum Auffinden einer speziellen Lösung φ den Faustregelansatz

$$\varphi(x) = Ce^{-x}\,, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Lösung: Die zu der gegebenen Differentialgleichung gehörige homogene Differentialgleichung

$$y'' - 4y = 0$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 4 = 0$ mit den reellen und voneinander verschiedenen Lösungen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Nach Satz 4.10 der Vorlesung ist die Lösungsgesamtheit der homogenen Differentialgleichung also gegeben durch

$$\mathbb{L}_h = \{x \mapsto c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}\,;\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Gemäß dem Hinweis der Aufgabenstellung machen wir zum Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung den Faustregelansatz

$$\varphi(x) = Ce^{-x}\,, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen von φ in die linke Seite der inhomogenen Differentialgleichung ergibt

$$Ce^{-x} - 4Ce^{-x} = -3Ce^{-x}.$$

Dies stimmt genau dann mit der rechten Seite der inhomogenen Differentialgleichung überein, wenn $C = -\frac{1}{3}$ gilt. Die Funktion

$$x \mapsto -\frac{1}{3}e^{-x}\,, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ist also eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Gemäß Satz 4.9 der Vorlesung ist daher die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{x \mapsto -\frac{1}{3}e^{-x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}\,;\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

□