



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie
(WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 14

Aufgabe 1. Bei einer Zerfallsreaktion der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ gilt für die Reaktionsgeschwindigkeit $f'(t)$ zur Zeit t

$$f'(t) = -kf(t)^n.$$

Hierbei ist $f(t)$ die bis zum Zeitpunkt t noch vorhandene Stoffmenge und $k > 0$ eine positive Konstante.

(a) Um was für einen Differentialgleichungstyp handelt es sich?

(b) Wie lautet im Fall $n > 1$ die Lösung der Differentialgleichung, wenn zur Zeit $t = 0$ die Stoffmenge $f(0) = y_0$ vorliegt?

Lösung: (a) Es handelt sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung, die mit getrennten Variablen vorliegt (mit $h(y) = y^n$ und $g(t) = -k$ in den Bezeichnungen von 4.2 der Vorlesung).

(b) Ist $y_0 = 0$, so liegt keine Stoffmenge vor, die zerfallen könnte. In diesem Fall lautet die Lösung $f(t) \equiv 0$.

Sei nun $y_0 > 0$. Gemäß (4) in 4.2 der Vorlesung muß (solange $f(t) > 0$) für die Lösung f der Anfangswertaufgabe

$$y' = -ky^n, \quad y(0) = y_0,$$

gelten:

$$\int_{y_0}^{f(t)} \frac{1}{y^n} dy = \int_0^t -k ds.$$

Wir führen auf beiden Seiten dieser Gleichung die Integration aus und erhalten:

$$\frac{1}{(n-1)y_0^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)f(t)^{n-1}} = -kt.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $1 - n$ und anschließende Addition von $\frac{1}{y_0^{n-1}}$ ergibt

$$\frac{1}{f(t)^{n-1}} = \frac{1}{y_0^{n-1}} + (n-1)kt = \frac{1 + (n-1)kty_0^{n-1}}{y_0^{n-1}}.$$

Hieraus folgt durch Übergang zum Kehrwert und anschließend zur $(n-1)$ -ten Wurzel:

$$f(t) = \frac{y_0}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1)kty_0^{n-1}}} \quad (t > 0).$$

□

Aufgabe 2. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 8 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\ -2x_4 &= -2. \end{aligned}$$

Lösung: Aus der letzten Gleichung folgt $x_4 = 1$. Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, so erhalten wir

$$2x_3 - 2 = -1, \quad \text{d.h. } x_3 = \frac{1}{2}.$$

Einsetzen von x_3 und x_4 liefert $x_2 = 1$. Setzen wir schließlich die Werte für x_2 , x_3 und x_4 in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$x_1 + 2 + \frac{3}{2} + 4 = 8, \quad \text{d.h. } x_1 = \frac{1}{2}.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des angegebenen Gleichungssystems ist also gegeben durch $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$, $x_2 = x_4 = 1$. $\square$

Aufgabe 3. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Gauß-Elimination.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Geben Sie dabei jeweils genau an, welche Umformungen Sie vornehmen.

Lösung: Die um die rechte Seite erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion des Doppelten der ersten Zeile von der zweiten und Subtraktion der ersten Zeile von der dritten liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Wir dividieren nun die zweite Zeile durch -3 , addieren anschließend das Vierfache dieser neuen zweiten Zeile zur dritten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 10 \end{pmatrix}.$$

Schließlich multiplizieren wir die letzte Zeile noch mit $\frac{3}{10}$ und erhalten das zum gegebenen Gleichungssystem äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_2 + \frac{4}{3}x_3 &= 5 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $x_3 = 3$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so folgt $x_2 = 1$ und Einsetzen dieser Werte in die erste Gleichung liefert schließlich nach Auflösung nach x_1 den Wert $x_1 = -3$. Die eindeutig bestimmte Lösung des angegebenen Gleichungssystems ist also gegeben durch $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. $\square$

Die folgende Aufgabe ist entnommen aus “Neun Bücher arithmetischer Technik”, einem Rechenbuch aus der frühen Hanzeit (202 v.Chr. bis 9 n.Chr.), welches über Jahrhunderte zur Pflichtlektüre der chinesischen Beamten gehörte. Aus dem in diesem Buch angegebenen Lösungsweg erkennt man, daß in China im wesentlichen schon damals die Gauß-Elimination bekannt war.

九章算術

Aufgabe* 4. Jetzt hat man folgendes Problem: Aus 3 Garben einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 Tou (1 Tou $\approx$ 1,97 Liter). Aus 2 Garben einer guten Ernte, 3 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 34 Tou. Aus 1 Garbe einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 3 Garben einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 26 Tou. Frage: Wieviel ist jedesmal aus 1 Garbe der Ertrag der guten, mittelmäßigen und schlechten Ernte?

Lösung: Bezeichnen wir mit x_1 bzw. x_2 bzw. x_3 den Ertrag einer Garbe der guten Ernte bzw. einer mittelmäßigen Ernte bzw. einer schlechten Ernte (jeweils in Tou), so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 39 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 34 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 26 \end{array}$$

mit der zugehörigen um die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

Zur Lösung verfahren wir nach dem Gauß-Algorithmus: Wir dividieren die erste Zeile durch 3 und subtrahieren anschließend die neue erste Zeile zweimal von der zweiten und einmal von der dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 13 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 8 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 13 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit $\frac{3}{5}$ und anschließende Subtraktion des $\frac{4}{3}$ -fachen der so entstandenen neuen zweiten Zeile von der dritten Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{24}{5} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{24}{5} \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{33}{5} \end{pmatrix}.$$

Nach Multiplikation der letzten Zeile mit $\frac{5}{12}$ erhält man das zu obigem Gleichungssystem äquivalente in rechter oberer Dreiecksform vorliegende System

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & 13 \\ & & x_2 & + & \frac{1}{5}x_3 & = & \frac{24}{5} \\ & & & & x_3 & = & \frac{11}{4} \end{array}.$$

Aus der dritten Gleichung folgt $x_3 = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so folgt $x_2 = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$ und Einsetzen dieser Werte in die erste Gleichung liefert schließlich nach Auflösung nach x_1 den Wert $x_1 = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$. Der Ertrag einer Garbe der guten Ernte ist also $9\frac{1}{4}$ Tou, der einer Garbe der mittelmäßigen Ernte $4\frac{1}{4}$ Tou und der einer Garbe der schlechten Ernte $2\frac{3}{4}$ Tou. $\square$

Im achten Kapitel (“Rechteckige Tabelle”) der “Neun Bücher arithmetischer Technik” lauten Antwort und “Musterlösung” zu dieser Aufgabe folgendermaßen:

Die Antwort sagt: Von der guten Ernte ⟨bring⟩ 1 Garbe $9\frac{1}{4}$ Tou. Von der mittelmäßigen Ernte ⟨bring⟩ 1 Garbe $4\frac{1}{4}$ Tou. Von der schlechten Ernte ⟨bring⟩ 1 Garbe $2\frac{3}{4}$ Tou.

Die Regel lautet: Lege auf der rechten Seite hin 3 Garben der guten Ernte, 2 Garben der mittelmäßigen Ernte ⟨und⟩ eine Garbe der schlechten Ernte ⟨sowie⟩ den Ertrag, die 39 Tou. Die Reihen der mittleren ⟨und⟩ geringen Ernte ⟨lege hin⟩ wie ⟨auf der⟩ rechten Seite. Immer multipliziere mit der ⟨Garbenzahl der⟩ guten Ernte der rechten Reihe die ⟨Zahlen der⟩ der mittleren Reihe und nimm hintereinander die Reste. Weiterhin multipliziere die nächste ⟨Zahl⟩ und nimm hintereinander die Reste, jedoch darf in der mittleren Reihe das mittelmäßige Getreide nicht verschwinden. Und nimm ⟨bei der linken Reihe⟩ hintereinander die Reste, ⟨aber es darf in der⟩ linken Seite die schlechte Ernte nicht verschwinden. Die obere ⟨Zahl⟩ ist der Divisor, die untere ist der Dividend. Der Dividend ⟨ist⟩ dann der Dividend der schlechten Ernte. Sucht man ⟨die Garbenzahl für die⟩ mittelmäßige Ernte, ⟨dann⟩ multipliziere mit dem Divisor ⟨der schlechten Ernte⟩ den Betrag unten in der mittleren Reihe und subtrahiere den Dividenten der schlechten Ernte. Dividiere den Rest durch die Garbenzahl der mittelmäßigen Ernte. Dann ⟨ist es⟩ der Dividend für die mittelmäßige Ernte. Sucht man ⟨die Garbenzahl für die⟩ gute Ernte, ⟨dann⟩ multipliziere ebenfalls mit dem Divisor ⟨der schlechten Ernte⟩ den Betrag unten in der rechten Reihe und subtrahiere die ⟨mit der entsprechenden Garbenzahl multiplizierten⟩

Dividenden für die schlechte Ernte⟨und⟩ die mittelmäßige Ernte. Den Rest dividiere durch die Garbenzahl der guten Ernte. Alle Dividenden teile durch den Divisor ⟨der schlechten Ernte⟩. Du erhältst es jedesmal in Tou.

Zur Erläuterung: Man nimmt an, daß die Nutzer dieses Rechenbuches mit einem rechteckigen Rechenbrett oder Rechentuch arbeiteten, auf dem sie die Zahlen mit Hilfe von Rechenstäbchen auslegten. Da man in China von oben nach unten und von rechts nach links schrieb, sah die erweiterte Koeffizientenmatrix auf dem Rechenbrett wohl folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Folgt man den Anweisungen der chinesischen Lösung, so erhält man der Reihe nach folgende Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

Nun wird die mittlere Spalte viermal von der linken Spalte subtrahiert und man erhält

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet x , bzw. y , bzw. z den Ertrag einer Garbe der schlechten, bzw. mittleren, bzw. guten Ernte, so wird weiter berechnet:

$$x = \frac{99}{36}, \quad y = \frac{24 \cdot 36 - 1 \cdot 99}{5} : 36 = \frac{153}{36}, \quad z = \frac{39 \cdot 36 - 1 \cdot 99 - 2 \cdot 153}{3} : 36 = \frac{333}{36},$$

woraus man die angegebene Lösung erhält.