



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie
(WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 15

Aufgabe 1. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n.$$

Gibt es Lösungen, die gegen einen Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ konvergieren?

Lösung: Die zu der angegebenen Differenzengleichung gehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 = 5\lambda - 4$$

hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$. Die Lösungsgesamtheit der Differenzengleichung ist also nach Satz 2.4 der Vorlesung gegeben durch:

$$\mathbb{L} = \{(\alpha + \beta 4^n)_{n=0}^\infty; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

□

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die unendlichen Reihen

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\ln(2007))^n, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^{2007}}$$

auf Konvergenz und geben Sie im Konvergenzfall ihren Grenzwert an.

Lösung: (a) Nach Beispiel 1.24 der Vorlesung ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (und sogar für alle $x \in \mathbb{C}$) konvergent, also insbesondere auch für $x = \ln(2007)$. Da der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion

$$x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist (vergl. das Beispiel nach 2.14 der Vorlesung), folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(2007))^n}{n!} = \exp(\ln(2007)) = 2007.$$

(b) Mit $a_n := \frac{\pi^n}{n^{2007}}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ (wegen $\pi > e$):

$$a_n > \frac{e^n}{n^{2007}} \rightarrow \infty$$

wegen $\frac{n^{2007}}{e^n} \rightarrow 0$ (nach Beispiel 2.6 der Vorlesung). Die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ ist also nicht gegen 0 konvergent. Nach Lemma 1.19 der Vorlesung ist die Reihe also divergent. □

Aufgabe 3. Welche der folgenden Funktionen besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion?

- (a) $x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ auf $(0, \pi)$,
- (b) $x \mapsto \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ auf $(0, \infty)$,
- (c) $x \mapsto f(x) := x^3 + 3x^2 + 2007$ auf $\mathbb{R}$,
- (d) $x \mapsto g(x) := x^2 + 2007x$ auf $(0, \infty)$.

Berechnen Sie im Existenzfall deren Ableitung.

Lösung: (a) Für die Ableitung der Kotangensfunktion gilt auf $(0, \pi)$ nach der Quotientenregel

$$\cot'(x) = \frac{\sin(x) \cos'(x) - \cos(x) \sin'(x)}{\sin(x)^2} = \frac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{-1}{\sin(x)^2} < 0.$$

Die Kotangensfunktion ist also auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend und besitzt daher eine Umkehrfunktion, die wir mit arccot bezeichnen, auf ihrem Bild. Wegen $0 < \sin(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ und für $x \rightarrow \pi$ sowie $\cos(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$, $\cos(x) \rightarrow -1$ für $x \rightarrow \pi$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \cot(x) = +\infty.$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 2.13 der Vorlesung) muß daher $\cot((0, \pi)) = \mathbb{R}$ gelten. Die Funktion arccot ist somit auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Um mit Hilfe des Satzes 2.25 die Ableitung der Umkehrfunktion angeben zu können, drücken wir analog wie in Beispiel (b) hinter Satz 2.25 der Vorlesung die $\cot'$ mit Hilfe der Kotangensfunktion aus. Es gilt für alle $x \in (0, \pi)$:

$$\cot(x)^2 = \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{1 - \sin(x)^2}{\sin(x)^2}.$$

Löst man diese Gleichung nach $\sin(x)^2$ auf, so erhält man

$$\sin(x)^2 = (1 + \cot(x)^2)^{-1}.$$

Also folgt nach Satz 2.25 der Vorlesung für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{arccot}'(y) = \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot}(y))} = -\sin(\operatorname{arccot}(y))^2 = \frac{-1}{1 + \cot(\operatorname{arccot}(y))^2} = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

(b) Für die Ableitung von $\coth$ auf $(0, \infty)$ gilt nach der Quotientenregel

$$\coth'(x) = \frac{\sinh(x) \cosh'(x) - \cosh(x) \sinh'(x)}{\sinh(x)^2} = \frac{\sinh(x)^2 - \cosh(x)^2}{\sinh(x)^2} = \frac{-1}{\sinh(x)^2} < 0.$$

Die Kotangensfunktion ist also auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend und besitzt daher eine Umkehrfunktion, die wir mit $\operatorname{arccoth}$ bezeichnen, auf ihrem Bild. Es ist $0 < \sinh(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ und $\cosh(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$ und somit $\lim_{x \rightarrow 0} \coth(x) = +\infty$. Nach Aufgabe 3, Blatt 6 der Übungen und den Grenzwertrechenregeln gilt weiter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \coth(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\tanh(x)} = 1.$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 2.13 der Vorlesung) muß daher $\coth((0, \infty)) = (1, \infty)$ gelten. Die Funktion $\operatorname{arccoth}$ ist somit für alle $y > 1$ definiert. Wie in der Lösung zu (a) drücken wir $\coth'$ mit Hilfe der Kotangensfunktion aus. Es gilt für alle $x \in (0, \infty)$:

$$\coth(x)^2 = \frac{\cosh(x)^2}{\sinh(x)^2} = \frac{1 + \sinh(x)^2}{\sinh(x)^2}.$$

Löst man diese Gleichung nach $\sinh(x)^2$ auf, so erhält man

$$\sinh(x)^2 = (\coth(x)^2 - 1)^{-1}.$$

Also folgt nach Satz 2.25 der Vorlesung für alle $y > 1$:

$$\operatorname{arccoth}'(y) = \frac{1}{\coth'(\operatorname{arccoth}(y))} = -\sinh(\operatorname{arccoth}(y))^2 = \frac{1}{\coth(\operatorname{arccoth}(y))^2 - 1} = \frac{1}{y^2 - 1}.$$

(c) Wegen $f(0) = 2007 = f(-3)$ ist f nicht injektiv, kann also keine Umkehrfunktion besitzen.

(d) Es ist $g'(x) = 2x + 2007 > 0$ für alle $x > 0$. Die Funktion g ist also auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend und besitzt daher eine Umkehrfunktion g^{-1} . Wegen $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ und $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ ist (nach dem Zwischenwertsatz) $g((0, \infty)) = (0, \infty)$. $g^{-1}(y)$ kann hier explizit berechnet werden: Aus

$$y = g(g^{-1}(y)) = g^{-1}(y)^2 - 2007g^{-1}(y), \quad (y > 0)$$

erhält man durch Auflösung der quadratischen Gleichung nach $g^{-1}(y)$ (unter Ausschluß der negativen Lösung):

$$g^{-1}(y) = \frac{2007}{2} + \sqrt{\left(\frac{2007}{2}\right)^2 + y}, \quad (y > 0).$$

Hieraus berechnet man mit den Rechenregeln für die Differentiation

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{2007}{2}\right)^2 + y}} = \frac{1}{\sqrt{2007^2 + 4y}}, \quad (y > 0).$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{1+x}{1+y}, \quad y(0) = 1.$$

Lösung: Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen (mit $g(x) = 1+x$ und $h(y) = 1+y$). Gemäß (4) in 4.2 der Vorlesung gilt für die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$\int_1^{y(x)} 1+y \, dy = \int_0^x 1+s \, ds$$

und somit

$$y(x) + \frac{1}{2}y(x)^2 - \frac{3}{2} = x + \frac{x^2}{2}.$$

Multiplikation mit 2 und anschließende Addition von 1 ergibt

$$(y(x) + 1)^2 - 3 = (x + 1)^2.$$

Auflösen nach $y(x)$ ergibt:

$$y(x) = -1 \pm \sqrt{(x+1)^2 + 3}.$$

Wegen $y(0) = y_0 = 1 > 0$ sind wir nur an der positiven Lösung

$$y(x) = -1 + \sqrt{(x+1)^2 + 3}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

interessiert. □

Aufgabe 5. Wie lauten die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{4}y'' - y' + y = 1?$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist konstant.

Lösung: Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir berechnen zunächst die Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\frac{1}{4}y'' - y' + y = 0,$$

was äquivalent ist zu

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

und hat die doppelte Lösung $\lambda = 2$. Nach Satz 4.12 der Vorlesung ist also die Lösungsgesamtheit der homogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$\mathbb{L}_h = \{x \mapsto c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Ist y_s eine konstante Lösung der inhomogenen Gleichung so folgt wegen $y_s'' \equiv y_s' \equiv 0$ aus der inhomogenen Gleichung schon $y_s \equiv 1$ und diese konstante Funktion genügt tatsächlich der gegebenen Differentialgleichung. Nach Satz 4.9 der Vorlesung erhalten wir also die folgende Lösungsgesamtheit der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung:

$$\mathbb{L} = \{x \mapsto 1 + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

□

Aufgabe 6. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 2x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Lösung: Aus der vierten Gleichung erhalten wir $x_4 = 1$. Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein so folgt $x_3 = \frac{1}{2}$. Einsetzen von x_4 und x_3 in die zweite Gleichung ergibt $x_2 = 1$. Durch Einsetzen von x_2, x_3 und x_4 in die erste Gleichung erhalten wir $x_1 = -\frac{5}{2}$. Das lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar mit der Lösung $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = x_4 = 1, x_3 = \frac{1}{2}$. □

Aufgabe 7. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} x + y + z &= b_1 \\ 2x + 4y + 8z &= b_2 \\ 3x - 9y + 27z &= b_3. \end{aligned}$$

Für folgende rechte Seiten:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie dabei jeweils genau an, welche Umformungen Sie vornehmen.

Lösung: Wie im Beispiel 5.6 der Vorlesung behandeln wir beide Aufgabenstellungen gemeinsam. Die um die beiden rechten Seiten erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 27 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion des doppelten der ersten Zeile von der zweiten Zeile und des dreifachen der ersten Zeile von der dritten Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & -12 & 24 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Durch Division der zweiten Zeile durch 2 und anschließende Addition des zwölffachen der neuen zweiten Zeile zur dritten erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 60 & 0 & -32 \end{pmatrix}.$$

Division der Letzten Zeile durch 60 und anschließende Subtraktion des dreifachen der neuen letzten Zeile von der zweiten Zeile und der letzten Zeile von der ersten Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{53}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

Subtrahieren wir nun noch die zweite Zeile von der ersten, so ergibt sich

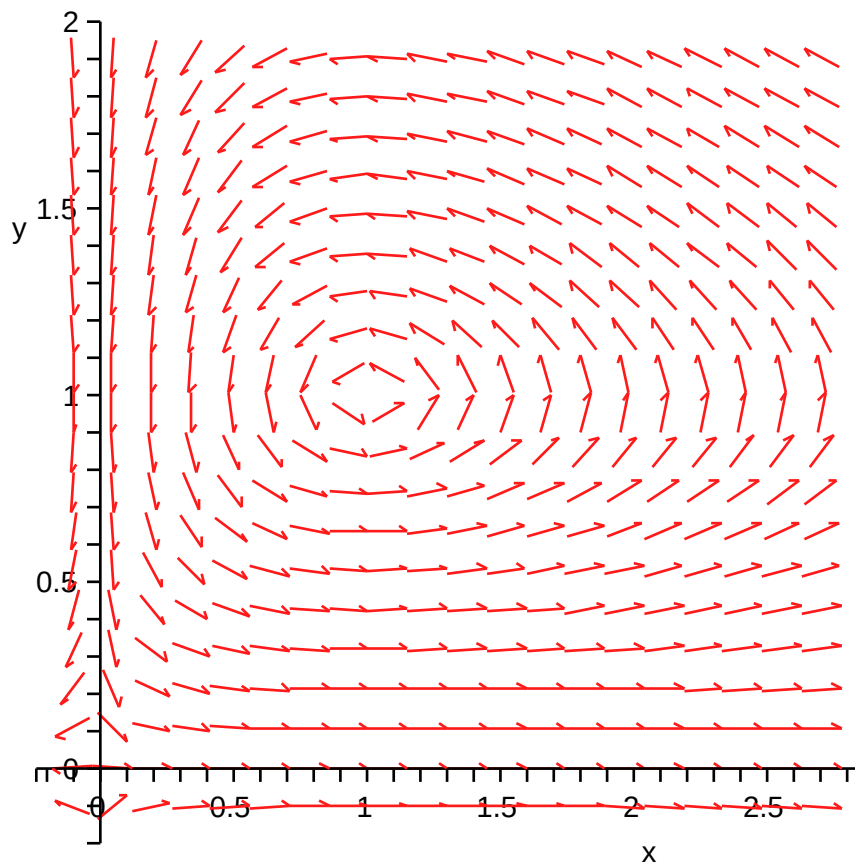
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{59}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

In der vorletzten Spalte steht nun die Lösung zu (a) und in der letzten die zu (b). Die Lösung zu (a) ist also $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ und die zu (b) ist $x = \frac{35}{7}$, $y = -\frac{32}{21}$, $z = -\frac{10}{21}$. $\square$

Es folgen noch die in der Vorlesung vom 14.2. gezeigten Folien zum Lotka-Volterra-Modell. zunächst das Vektorfeld zu dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(1 - y(t)) \\ y'(t) &= 3y(t)(x(t) - 1). \end{aligned}$$

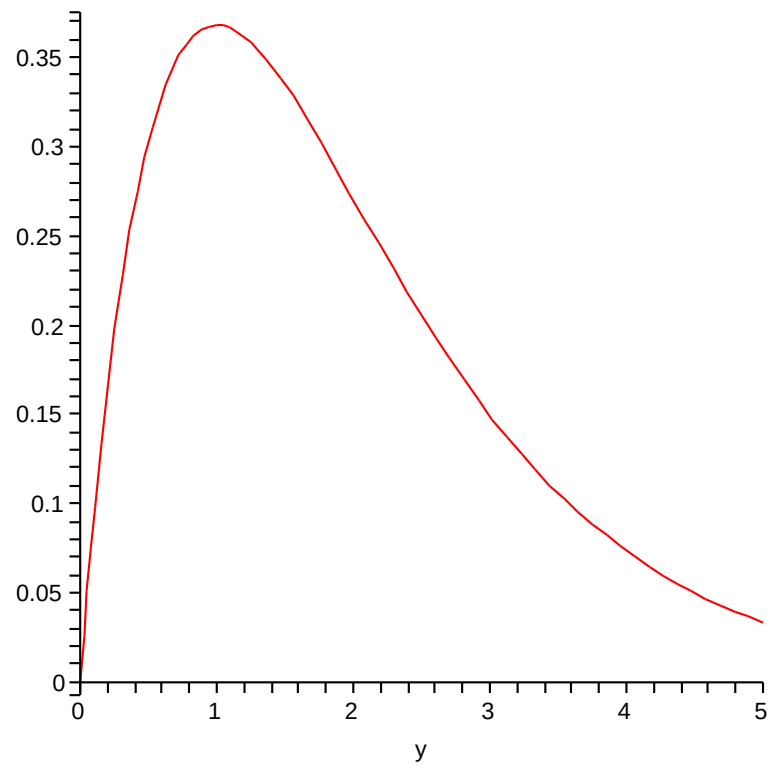
Lotka-Volterra Modell



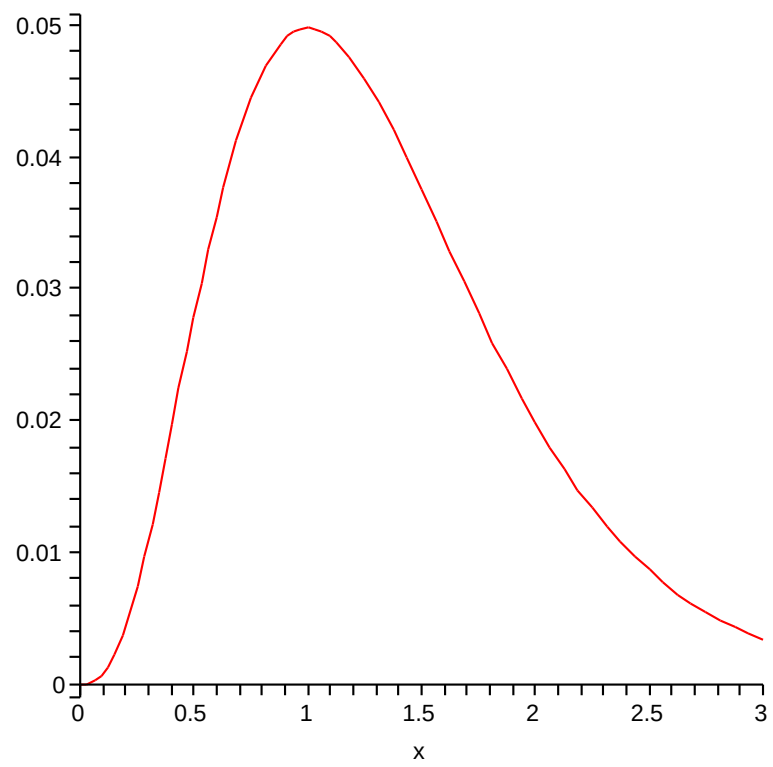
Die implizite Gleichung der Bahn (Kapitel 6, Gleichung (8) der Vorlesung) lautet in diesem Fall

$$f(y)g(x) = y^1 e^{-y} \cdot x^3 e^{-3y} = \gamma,$$

wobei der interessante Bereich für γ der Bereich $0 < \gamma < e^{-4}$ ist. Zunächst ein Bild des Graphen von f :



Es folgt der Graph von g :



Für $\gamma = 0.009$ erhalten wir folgende Bahnkurve:

