UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 1. (a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen und geben Sie das Ergebnis in der Form $a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ an:

$$\textbf{(i)}\quad (5-i)+(8-3i),\qquad \textbf{(ii)}\quad \frac{1+i}{1-i},\qquad \textbf{(iii)}\quad (1+2i)(3+4i).$$

(b) Berechnen Sie

$$\textbf{(i)}\quad \overline{8-3i},\qquad \textbf{(ii)}\quad \left|\frac{1+i}{1-i}\right|,\qquad \textbf{(iii)}\quad (1+2i)\overline{(3+4i)}.$$

Lösung: (a) (i) Nach Definition der Addition in $\mathbb{C}$ is t

$$(5-i)+(8-3i)=(5+8)+(-1-3)i=13-4i\,.$$

(ii) Um den Nenner reell zu machen erweitern wir mit $1+i$ und erhalten wegen $i^2=-1$:

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i=0+1i\,.$$

(iii) Nach Definition der Multiplikation in $\mathbb{C}$ gilt

$$(1+2i)(3+4i)=(1\cdot 3-2\cdot 4)+(1\cdot 4+2\cdot 3)i=-5+10i\,.$$

(b) (i) Es ist $\overline{8-3i}=8+3i$ und daher $|\overline{8-3i}|=\sqrt{64+9}=\sqrt{73}$.

(ii) Nach Teil (ii) von (a) ist $\left|\frac{1+i}{1-i}\right|=|i|=1$.

(iii) Es ist $(1+2i)\overline{(3+4i)}=(1+2i)(3-4i)=(3+8)+(6-4)i=11+2i$ und daher $|(1+2i)\overline{(3+4i)}|=\sqrt{11^2+2^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$. □

Aufgabe 2. Geben Sie alle Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen an:

(a) $2z^2+4z+5=0$.
(b) $z^2+2iz-1=0$.
(c) $2z^2+2iz+4i=0$.

Lösung: (a) Die Gleichung ist äquivalent zu: $z^2+2z+\frac{5}{2}=0$ und hat daher nach Satz 1.6 der Vorlesung die Lösungen $z_{1/2}=-1\pm w_0$ wobei w_0 eine Lösung von $w_0^2=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$ ist. Also lauten die Lösungen:

$$z_1=-1+i\sqrt{\frac{3}{2}}\quad\text{und}\quad z_1=-1-i\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

(b) Wegen $i^2=-1$ ist die Gleichung nach der ersten binomischen Formel äquivalent zu $(1+i)^2=0$, hat also die doppelte Lösung $z_1=z_2=-i$.

(c) Die Gleichung ist äquivalent zu $z^2+iz+2i=0$, hat also nach Satz 1.6 der Vorlesung die Lösungen $z_{1/2}=-\frac{i}{2}\pm w_0$ wobei w_0 eine Lösung von

$$w_0^2=\Big(-\frac{i}{2}\Big)^2-2i=-\frac{1}{4}-2i \tag{1}$$

ist. Zur Berechnung von w_0 machen wir den Ansatz $w_0 = a+bi$ mit zu berechnenden reellen Zahlen a und b. Setzen wir dies in (1) ein, so müssen wir also a und b so bestimmen, daß gilt:

$$(a+ib)^2 = -\frac{1}{4} - 2i\,.$$

Ausmultiplizieren der linken Seite dieser Gleichung führt zu

$$a^2 - b^2 + 2abi = -\frac{1}{4} - 2i\,.$$

Da zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn ihre Realteile und Imaginärteile übereinstimmen ist diese Gleichung äquivalent zu den beiden folgenden Gleichungen

$$a^2 - b^2 = -\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad ab = -1$$

mit den zu bestimmenden reellen Unbekannten a und b. Aus der zweiten Gleichung folgt $b = -\frac{1}{a}$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein so erhalten wir als Gleichung zur Bestimmung von a:

$$a^2 - a^{-2} = -\frac{1}{4}\,.$$

Nach Multiplikation mit a^2 sieht man, daß diese Gleichung äquivalent ist zu der biquadratischen Gleichung

$$a^4 + \frac{a^2}{4} - 1 = 0\,.$$

Da a eine reelle Zahl ist, kommt kommt für a^2 nur ein positiver Wert in Frage. Die positive Lösung der Gleichung

$$x^2 + \frac{x}{4} - 1 = 0$$

ist

$$x = \frac{1}{8}(-1+\sqrt{65}) = \frac{8}{\sqrt{65}+1}\,.$$

Wir erhalten demnach

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{8}(-1+\sqrt{65})} = \pm\sqrt{\frac{8}{\sqrt{65}+1}}$$

und somit (wegen $ab = -1$)

$$b = \mp\sqrt{\frac{1}{8}(\sqrt{65}+1)} \quad \text{und } w_0 = a+ib = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}\left(\sqrt{-1+\sqrt{65}} - i\sqrt{\sqrt{65}+1}\right)\,.$$

Die Lösungen der gegebenen Gleichung sind also:

$$z_1 = -\frac{i}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}}\left(\sqrt{-1+\sqrt{65}} - i\sqrt{\sqrt{65}+1}\right) \text{ und } z_1 = -\frac{i}{2} - \frac{1}{\sqrt{8}}\left(\sqrt{-1+\sqrt{65}} - i\sqrt{\sqrt{65}+1}\right)\,.$$

Aufgabe 3. Das *arithmetische Mittel* $A(x,y)$, das *geometrische Mittel* $G(x,y)$ und das *harmonische Mittel* $H(x,y)$ zweier positiver Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$A(x,y) := \frac{x+y}{2}\,, \qquad G(x,y) := \sqrt{xy}\,, \qquad H(x,y) := \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = A\big(x^{-1}, y^{-1}\big)^{-1}.$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiver Zahlen heißt

- *arithmetische Folge*, falls $a_{n+1} = A(a_{n+2}, a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
- *geometrische Folge*, falls $a_{n+1} = G(a_{n+2}, a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
- *harmonische Folge*, falls $a_{n+1} = H(a_{n+2}, a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(a) Zeigen Sie für alle $x, y > 0$, die Gültigkeit der Ungleichungen

$$H(x,y) \le G(x,y) \le A(x,y).$$

(b) Geben Sie alle arithmetischen Folgen an.
Hinweis: Nach Definition gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+2} + a_n)$. Lösen Sie diese Differenzengleichung.

Lösung: **(a)** Aus $0 \le (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$ folgt $2\sqrt{ab} \le a + b$ und hieraus nach Division durch 2 die rechte der beiden Ungleichungen. Wenden wir nun die bereits gezeigte rechte Ungleichung an auf a^{-1} und b^{-1} statt a und b, so folgt

$$\frac{1}{G(a,b)} = \frac{1}{\sqrt{ab}} = G(a^{-1}, b^{-1}) \le A(a^{-1}, b^{-1})$$

und hieraus durch Multiplikation mit $G(a,b)A(a^{-1}, b^{-1})^{-1}$ unter Beachtung von $H(a,b) = A(a^{-1}, b^{-1})^{-1}$ die auch linke der behaupteten Ungleichungen.

(b) Nach Definition ist eine Folge genau dann eine arithmetische Folge, wenn sie $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+2} + a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt, d.h. wenn sie eine Lösung der Differenzengleichung $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ ist. Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

und hat die doppelte Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Nach Satz 1.4 ist die Lösungsmenge der Differenzengleichung

$$\mathbb{L} = \{(\alpha 1^n + \beta n 1^n)_{n=0}^{\infty} \,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + \beta n)_{n=0}^{\infty} \,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ist also genau dann eine arithmetische Folge, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n = \alpha + \beta n$ mit von n unabhängigen Konstanten $\alpha, \beta > 0$.

Allgemeiner werden auch alle Folgen aus $\mathbb{L}$ arithmetische Folgen genannt. □

Aufgabe* 4. Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Fibonaccizahlen. Berechnen Sie $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung: Unter Verwendung der Rekursionsformel für die Fibonaccizahlen erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (F_n + F_{n-1})F_{n+1} - (F_{n+1} + F_n)F_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1})$$

Wendet man diesen Trick n mal an so erhält man schließlich (wegen $F_1 = 1$ und $F_0 = 0$):

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n(F_1^2 - F_2F_0) = (-1)^n\,.$$

Die äußere Gleichung stimmt auch für $n = 0$. Diesen Wert kann man auch durch Einsetzen der in der Vorlesung hergeleiteten Formel für die Fibonacizahlen

$$F_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}}\,, \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

für $k = n$, $k = n + 1$ und $k = n + 2$ in den Ausdruck $F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n$ und anschließendes Vereinfachen erhalten. Diese Rechnung ist jedoch etwas aufwendiger. □