UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 1. (a) Geben Sie alle geometrischen Folgen an.
(b) Geben Sie alle harmonischen Folgen an.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiver reeller Zahlen genau dann harmonisch ist, wenn die Folge $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine arithmetische Folge ist und wenden Sie dann Aufgabe 3(b) von Blatt 2 an.

Lösung: (a) Ist $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine geometrische Folge, so sind nach der Definition auf Blatt 2 alle a_n positiv. Wegen $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt (nach Division durch $a_{n-1}a_n$)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Die Folge $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ ist also eine Folge, die für alle $n \in \mathbb{N}$ den konstanten Wert $q = \frac{a_1}{a_0}$ annimmt. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}a_n = qa_n$$

also induktiv $a_1 = qa_0$, $a_2 = qa_1 = q^2a_0$, allgemein $a_n = q^na_0$. Jede geometrische Folge ist also von der Gestalt $(\alpha q^n)_{n=0}^{\infty}$ mit $\alpha = a_0 > 0$ und $q > 0$. Umgekehrt erfüllt auch jede Folge dieser Gestalt die Bedingung der geometrischen Folge.

Allgemeiner nennt man alle Folgen der Gestalt $(\alpha q^n)_{n=0}^{\infty}$ mit $\alpha, q \in \mathbb{R}$ ebenfalls geometrische Folgen.

(b) Wegen

$$H(a_{n+2}, a_n) = A(a_{n+2}^{-1}, a_n^{-1})^{-1}$$

ist eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ positiver Zahlen genau dann harmonisch, wenn

$$a_{n+1} = A(a_{n+2}^{-1}, a_n^{-1})^{-1}$$

und somit auch

$$a_{n+1}^{-1} = A(a_{n+2}^{-1}, a_n^{-1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, d.h. genau dann, wenn $(a_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$ eine arithmetsche Folge ist. Dies ist nach Aufgabe 3 (b), Blatt 2, genau dann der Fall, wenn es $\alpha, \beta > 0$ gibt mit $a_n^{-1} = \alpha + \beta n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. genau dann, wenn wenn es $\alpha, \beta > 0$ gibt mit

$$a_n = \frac{1}{\alpha + \beta n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

□

Aufgabe 2. Fritzchen hat zu seinem Geburtstag ein Mehrschweinchenpärchen bekommen. Alle vier Monate wirft das Weibchen Junge, von denen Fritzchen jeweils drei männliche Tiere behält. Todesfälle treten nicht auf. Beschreiben Sie die Anzahl a_n der Tiere nach n Würfen. Um was für eine Folge handelt es sich? Wieviele Tiere hat Fritzchen nach zwei Jahren?

Lösung: Da bei jedem Wurf drei Junge neu hinzukommen, ist die Anzahl a_n der von Fritzchen gehaltenen Meerschweinchen nach n Würfen: $a_n = 2 + n \cdot 3$. Es handelt sich also um eine arithmetische Folge. Nach zwei Jahren also nach sechs Würfen ist die Anzahl der Tiere: $a_6 = 2 + 3 \cdot 6 = 20$. □

Aufgabe 3. Auch der kleine Hans hat ein Mehrschweinchenpärchen geschenkt bekommen. Er behält von jedem Wurf seiner Tiere ein Pärchen, welches ebenfalls alle vier Monate Junge wirft, zum ersten Mal nach vier Monaten. Beschreiben Sie die Anzahl b_n der Tiere nach $4n$ Monaten. Um was für eine Folge handelt es sich? Wieviele Tiere hat Hans nach zwei Jahren?

Lösung: Ist a_n die Anzahl der Meerschweinchen, die Hans nach $4n$ Monaten besitzt, so gilt $a_{n+1} = 2a_n$, da von dem Wurf eines jeden Weibchens ein Pärchen behalten wird, also genauso viele Tiere hinzukommen, wie vorher vorhanden waren. Da Hans mit zwei Tieren begonnen hat, ist die Anzahl der Tiere nach $4n$ Monaten: $a_n = 2^{n+1}$. Es hadelt sich also um eine geometrische Folge. Nach zwei Jahren, also $4 \cdot 6$ Monaten besitzt Hans $a_6 = 2^8 = 256$ Tiere. Seine Eltern werden dies wohl kaum mit Freude sehen. $\square$

Aufgabe 4. Seien $a_0, a_1, \dots a_n$ reelle von 0 verschiedene Zahlen. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\textbf{(i)} \quad \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \,, \qquad\qquad \textbf{(ii)} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} \,.$$

Lösung: **(i)** Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \\
&= \qquad + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\
&\quad - a_0 - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1} \\
&= a_n - a_0 \,.
\end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0} \,.$$

$\square$

Aufgabe* 5. Beschreiben Sie die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \operatorname{Re} 1/z = 1/2006\}$$

geometrisch. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Schreiben wir $z = x + iy$, so müssen die Punkte der Menge M der Gleichung

$$\frac{1}{2006} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

genügen. Durchmultiplizieren der äußeren Gleichung mit $2006 \cdot (x^2 + y^2)$ liefert die äquivalente Gleichung

$$x^2 + y^2 = 2006x \,.$$

Diese ist äquivalent zu

$$(x - 1003)^2 + y^2 = 1003^2$$

und diese (durch Wurzelziehen) zu $|z - 1003| = 1003$. M ist also die Menge aller der Punkte $z \in \mathbb{C}$, die den Abstand 1003 zu dem Punkt $z_0 = 1003 + i0 = (1003, 0)$ haben, d.h. M ist eine Kreislinie in der komplexen Ebene mit dem Mittelpunkt $z_0 = 1003 + 0i = (1003, 0)$ und dem Radius $r = 1003$. $\square$