UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)
Blatt 4

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Definition der Konvergenz, daß $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n$ mit

$$\text{(i) } x_n = \frac{4n^2+n-7}{3n^3+8} \qquad \text{(ii) } x_n = (3n)^{2/n} - 2006^{3/n} \qquad \text{(iii) } x_n = \frac{1}{n^2}\binom{n}{2}.$$

Lösung: (a) Wir müssen zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ aus $\mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \varepsilon^{-2}$. Dann folgt für alle $n \geq n_0$ aus $\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon\,.$$

Also gilt die Behauptung.

(b) Zu (i): Erweitern des Bruchs mit n^{-3} und Anwenden der Grenzwertrechenregeln ergibt für $n \to \infty$:

$$x_n = \frac{4n^2+n-7}{3n^3+8} = \frac{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{7}{n^3}}{3+\frac{8}{n^3}} \to \frac{0+0-0}{3+0} = 0$$

also $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n-7}{3n^3+8} = 0$.
Zu (ii): Nach Satz 1.16 der Vorlesung gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{und für alle } a > 0: \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,.$$

Mit den Grenzwertrechenregeln folgt hieraus für $n \to \infty$.

$$(3n)^{2/n} - 2006^{3/n} = (\sqrt[n]{3})^2(\sqrt[n]{n})^2 - \sqrt[n]{2006^3} \to 1^2 \cdot 1^2 - 1 = 0.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty}(3n)^{2/n} - 2006^{3/n} = 0$.
Zu (iii): Nach den Grenzwertrechenregeln gilt für $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n^2}\binom{n}{2} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\binom{n}{2} = \frac{1}{2}$. □

Aufgabe 2. Sei $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Fibonaccizahlen. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}\,, \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\big((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\big)2^{n+1}\sqrt{5}}{2^n\sqrt{5}\big((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\big)} = 2\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}\,.$$

Erweitern des Bruches mit $(1+\sqrt{5})^{-n-1}$ ergibt mit $q := \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-q^n}{1-q^{n+1}}\,.$$

Wegen $|q| < 1$ folgt nach Beispiel 1.10 der Vorlesung mit den Grenzwertrechenregeln

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-q^n}{1-q^{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-0}{1-0} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1),$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen durch Erweiterung mit $\sqrt{5}-1$ den Nenner rational gemacht haben.
Diese Zahl $\varphi := \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ teilt das Intervall $[0,1]$ im Verhältnis des *goldenen Schnittes*, d.h. die Länge des Gesamtintervalls $[0,1]$ verhält sich zur Länge des größeren Teilintervalls $[0,\varphi]$ wie die Länge dieses Teilintervalls zur Länge des kürzeren Teilintervalls $[\varphi,1]$:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1-\varphi} = \Phi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

□

Aufgabe 3. Zeigen Sie die Divergenz der nachstehenden Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

(a) $x_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!} - n$.
(b) $x_n = \frac{n^4+1}{n^3+2n+3}$.
(c) $x_n = 1 + (-1)^n$.

Welche dieser Folgen sind im uneigentlichen Sinn konvergent?

Lösung: (a) Erweiterung des Bruches mit $n!^{-1}$ ergibt

$$x_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!} - n = \frac{n+1}{n+1-1} - n = \frac{n+1}{n} - n.$$

Ist $C > 0$ beliebig, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > C + 2$. Für alle $n \geq n_0$ folgt

$$x_n = \frac{n+1}{n} - n \leq 2 - n \leq 2 - n_0 < -C.$$

Die Folge ist also im uneigentlichen Sinn konvergent gegen $-\infty$ und somit nach Bemerkung 1.14 der Vorlesung divergent, da sie unbeschränkt ist.

(b) Es gilt

$$x_n = \frac{n^4+1}{n^3+2n+3} \geq \frac{n^4}{n^3+2n+3} \geq \frac{n^4}{n^3+2n^3+3n^3} = \frac{n}{6}.$$

Ist $C > 0$ beliebig, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 6C$. Für alle $n \geq n_0$ folgt

$$x_n \geq \frac{n}{6} \geq \frac{n_0}{6} > C.$$

Die Folge ist also im uneigentlichen Sinn konvergent gegen ∞ und somit nach Bemerkung 1.14 der Vorlesung divergent, da sie unbeschränkt ist.

(c) Wir gehen vor wie in dem Beispiel nach Definition 1.13: Es gilt für $n \to \infty$:

$$x_{2n} = 1 + (-1)^{2n} = 2 \to 2 \quad \text{und} \quad x_{2n+1} = 1 + (-1)^{2n+1} = 0 \to 0 \neq 2\,.$$

Nach Bemerkung 1.12 der Vorlesung ist die Folge divergent, da sie zwei gegen verschiedene Grenzwerte konvergente Teilfolgen besitzt. Wegen $0 \leq x_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kann die Folge auch nicht im uneigentlichen Sinn konvergent sein. □

Aufgabe* 4. Untersuchen Sie die durch

$$x_n := \sqrt{n+2006} - \sqrt{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegebene Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und berechnen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert.

Hinweis: Machen Sie den Zähler rational.

Lösung: Gemäß dem Hinweis erweitern wir mit $\sqrt{n+2006} + \sqrt{n}$ und erhalten mit der dritten binomischen Formel und der Monotonie der Wurzel:

$$\begin{aligned} 0 \le x_n = \sqrt{n+2006} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+2006} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2006} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2006} + \sqrt{n}} = \frac{n+2006-n}{\sqrt{n+2006} + \sqrt{n}} \\ &< \frac{2006}{\sqrt{n}} \,. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2006^2}{\varepsilon^2}$. Für alle $n \ge n_0$ gilt dann

$$|x_n| < \frac{2006}{\sqrt{n}} \le \frac{2006}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

Also ist die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent gegen 0. □