



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie
(WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden unendlichen Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}.$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}.$

Lösung: Bei allen drei Reihen handelt es sich um geometrische Reihen. Nach Beispiel 1.18 der Vorlesung gilt für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$:

(1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(a) Aus (1) folgt mit $q = 1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

(b) Aus (1) folgt mit $q = -1/2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

(c) Aus (1) folgt mit $q = 1/2^2 = 1/4$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

□

Aufgabe 2. Zeigen Sie die Divergenz der beiden folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3 + 1}.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$

Lösung: (a) Nach den Grenzwertrechenregeln gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n^3}{n^3 + 1} = \frac{1}{1 + n^{-3}} \rightarrow \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Die Glieder der Reihe unter (a) bilden also keine gegen Null konvergente Folge. Nach Lemma 1.19 der Vorlesung kann die Reihe nicht konvergent sein.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n}{n^2 + 1} \geq \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Da die harmonische Reihe nach Beispiel 1.20 der Vorlesung divergent ist (und daher auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ eine divergente Minorante zu der gegebenen Reihe ist), ist die Reihe nach der Folgerung aus dem Majorantenkriterium divergent. $\square$

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie die Konvergenz der folgenden Reihe und geben Sie ihren Grenzwert an:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}.$$

Hinweis: Beachten Sie: $\frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ und betrachten Sie die Partialsummen s_n der Reihe für $n \rightarrow \infty$.

(b) Für welche $p \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Beachten Sie (a) und das Majorantenkriterium.

Lösung: (a) Unter Beachtung des Hinweises sieht man für die n -te Partialsumme

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit ist die Reihe in (a) konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1.$$

(b) Für $p = 1$ ist die Reihe nach Beispiel 1.20 divergent. Für $p \geq 2$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}.$$

Nach (a) und der Reihengrenzwertregel 1.21 (b) ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ also für alle $p \geq 2$ eine konvergente Majorante zu der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Nach dem Majorantenkriterium 1.22 folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ für alle $p \geq 2$. $\square$

Aufgabe* 4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}$ konvergent, für welche $x \in \mathbb{R}$ divergiert sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die geometrische Reihe und das Majorantenkriterium.

Lösung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ hat man

$$\left| \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \right| = \frac{|x|^n}{x^{2n} + 1} \leq |x|^n.$$

In diesem Fall ist also die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ eine nach Beispiel 1.18 konvergente Majorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die Reihe der Aufgabe nach dem Majorantenkriterium also (sogar absolut) konvergent.

Für $|x| = 1$, d.h. $x = \pm 1$ (und somit $x^2 = 1$) haben wir

$$\left| \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \right| = \frac{|x|^n}{x^{2n} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

In diesem Fall konvergieren die Glieder der Reihe also nicht gegen Null. Nach Lemma 1.19 der Vorlesung ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}$ somit im Fall $|x| = 1$ divergent.

Im verbleibenden Fall $|x| > 1$ ist $1/|x| < 1$ und wir können wie folgt abschätzen:

$$\left| \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \right| = \frac{|x|^n}{x^{2n} + 1} \leq \frac{|x|^n}{x^{2n}} = \frac{1}{|x|^n} = \left(\frac{1}{|x|} \right)^n.$$

Die geometrische Reihe (1) ist also in diesem Fall mit $q = \frac{1}{|x|} < 1$ eine konvergente Majorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}$. Mit dem Majorantenkriterium folgt die (absolute) Konvergenz für $|x| > 1$.

Wir fassen zusammen: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \neq 1$ (absolut) konvergent. Sie ist im Fall $|x| = 1$ divergent.