UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)

Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen: (a) sinh (b) cosh (c) tanh

Lösung: (a) Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen:
1. Variante: Man kann vorgehen wie in Beispiel 2.17 und ausgehend von der am Ende von §1 angegebenen Reihendarstellung

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

Satz 2.16 der Vorlesung anwenden. Nach diesem Satz dürfen wir in (1) die Ableitung durch gliedweises Differenzieren der Reihe berechnen. Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen mit $2n$ gekürzt haben und beim letzten Gleichheitszeichen wie in der Vorlesung bei der Behandlung der Ableitung von $\cos(x)$ vorgegangen sind. Mit der Reihendefinition von $\sinh(x)$ folgt also:

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

2. Variante: Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgen, wie in der Vorlesung gezeigt wurde, wegen

$$(-x)^n = \begin{cases} x^{2k} & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{N}_0 \\ -x^{2k+1} & \text{für } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

die Aussagen

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x) \tag{3}$$

und

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(x)\,. \tag{4}$$

Indem wir (3) nach den Rechenregeln 2.19 für die Differentiation differenzieren erhalten wir (wegen $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ und, nach der Kettenregel, $\frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x}$):

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Man kann analog wie in (a) vorgehen und entweder die sinh-Reihe gliedweise differenzieren oder einfacher die Darstellung (4) nach den Rechenregeln 2.19 differenzieren. In diesem Fall hat man:

$$\sinh'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big) = \frac{1}{2}(e^x - (-1)e^{-x}) = \cosh(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Nach Definition gilt:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Unter Verwendung der Quotientenregel 2.19 (d) und (a) und (b) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\tanh(x) &= \frac{\cosh(x)\sinh'(x) - \cosh'(x)\sinh(x)}{(\cosh(x))^2} = \frac{(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2}{(\cosh(x))^2} \\ &= \frac{1}{(\cosh(x))^2},\end{aligned}$$

wobei die in der Vorlesung gezeigte Identität $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwendet wurde. □

Aufgabe 2. Das Wachstumsverhalten von Populationen mit beschränktem Lebensraum wird häufig durch Funktionen der Gestalt

$$P(t) = \frac{B}{1 + ce^{-\lambda Bt}} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

beschrieben. Hierbei ist $B > 0$ die Grenzgröße der Population, die nicht überschritten werden kann, und λ eine von der speziellen Population abhängige positive Konstante. Die Konstante $c > 0$ kann aus der Größe der Population zu einer Anfangszeit t_0 berechnet werden.
(a) Berechnen Sie die Konstante c für den Fall, dass die Anfangspopulation $P(0)$ zur Zeit $t = 0$ mit $B/10000$ übereinstimmt.
(b) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} P(t) \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to-\infty} P(t)\,.$$

(c) Zeigen Sie, daß die Funktion P der Gleichung

$$P'(t) = \lambda P(t)(B - P(t)) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

genügt. $P'(t)$ ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Population zur Zeit t.

Lösung: (a) Ist $P(0) = B/10000$, so folgt aus der Definition von $P(t)$ mit $t = 0$ wegen $e^0 = 1$:

$$\frac{B}{10000} = \frac{B}{1 + ce^{-\lambda B\cdot 0}} = \frac{B}{1+c}$$

Auflösen dieser Gleichung nach c liefert $c = 9999$.

(b) In der Vorlesung wurde in Folgerung 2.7 gezeigt: $e^{-t} \to 0$ für $t \to \infty$. Da die Abbildung $y \mapsto y^{\lambda B}$ stetig ist, folgt nach Lemma 2.12 (b) der Vorlesung: $e^{-\lambda Bt} \to 0$ für $t \to \infty$. Mit den Grenzwertrechenregeln erhalten wir also

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{B}{1 + ce^{-\lambda Bt}} = \frac{B}{1 + c\cdot 0} = B.$$

Für $t \to -\infty$ haben wir $-t \to +\infty$ und daher $e^{\lambda Bt} = e^{-\lambda B(-t)} \to 0$ für $t \to \infty$. Mit den Grenzwertrechenregeln folgt:

$$\lim_{t\to-\infty} P(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{B}{1 + ce^{-\lambda Bt}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{Be^{\lambda Bt}}{e^{\lambda Bt} + c} = \frac{B\cdot 0}{0+c} = 0.$$

(c) Nach den Rechenregeln für die Differentiation gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$P'(t) = \frac{B^2\lambda ce^{-\lambda Bt}}{(1 + ce^{-\lambda Bt})^2} = \lambda\frac{B^2(1 + ce^{-\lambda Bt}) - B^2}{(1 + ce^{-\lambda Bt})^2} = \lambda P(t)(B - P(t))\,.$$

Also erfüllt P die angegebene Gleichung. □

Aufgabe 3. (a) Seien λ und B zwei positive Konstanten. Die nach unten geöffnete Parabel $y = \lambda x(B - x)$, $(x \in \mathbb{R})$, nimmt bekanntlich ihr Maximum in ihrem Scheitelpunkt an. Berechnen Sie diesen.
(b) Berechnen Sie Zeitpunkt und Größe der maximalen momentanen Wachstumsgeschwindigkeit in der Situation von Aufgabe 2 (a).

Lösung: (a) Aus der Schule weiß man, daß für eine Parabel die durch die Gleichung $y(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ gegeben ist der Scheitelpunkt sich berechnet als $S = \big(-\frac{b}{2a}, y\big(-\frac{b}{2a}\big)\big)$. In der speziellen Situation der Aufgabenstellung hat man daher

$$S = \big(\frac{B}{2}, y(\frac{B}{2})\big) = \big(\frac{B}{2}, \lambda\frac{B^2}{4}\big)$$

(b) Nach Aufgabe 2 (c) und Teil (a) wird $P'(t)$ maximal genau dann, wenn $P(t_{\mathrm{max}}) = B/2$ gilt. Es ist dann $P'(t_{\mathrm{max}}) = \lambda B^2/4$. Nach Definition von P gilt

$$\frac{B}{2} = P(t_{\mathrm{max}}) = \frac{B}{1 + ce^{-\lambda B t_{\mathrm{max}}}}\,.$$

Diese Beziehung können wir zur Berechnung von t_{max} verwenden. Aus der äußeren Gleichung erhält man, indem man zunächst nach $e^{-\lambda B t_{\mathrm{max}}}$ auflöst:

$$e^{-\lambda B t_{\mathrm{max}}} = c^{-1}\,.$$

Wenden wir hierauf den natürlichen Logarithmus an, so folgt (wegen $\ln(c^{-1}) = -\ln(c)$.

$$-\lambda B t_{\mathrm{max}} = -\ln(c)$$

und hieraus mit $c = 9999$:

$$t_{\mathrm{max}} = \frac{\ln(c)}{B\lambda} = \frac{\ln(9999)}{B\lambda}\,.$$

□

Aufgabe* 4. Sei $N(t)$ die Anzahl der Kerne einer radioaktiven Substanz zur Zeit t. Der Zerfall der radioaktiven Substanz wird beschrieben durch $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Hierbei ist $\lambda > 0$ die von der Substanz abhängige Zerfallskonstante und N_0 die Anzahl der radioaktiven Atome zur Anfangszeit $t = 0$. Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist die Zeitspanne, in der die Anzahl der Atome der radioaktiven Substanz auf die Hälfte des Wertes zu Beginn der Beobachtung abgenommen hat.
(a) Berechnen Sie die Halbwertszeit als Funktion von λ.
(b) Drücken Sie umgekehrt die Zerfallskonstante λ durch die Halbwertszeit $T_{1/2}$ aus und geben Sie $N(t)$ als Funktion von t und $T_{1/2}$ an.
(c) Zeigen Sie, daß die relative momentane Abnahme $-N'(t)/N(t)$ konstant ist. Geben Sie diese Konstante an.

Lösung: (a) Nach Definition der Halbwertszeit gilt

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Division durch N_0 und Übergang zum natürlichen Logarithmus ergibt $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) = -\lambda T_{1/2}$. Es folgt

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}\,.$$

(b) Aus (a) folgt durch Auflösen nach λ

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}\,.$$

Setzen wir dies in die Definition von $N(t)$ ein so erhalten wir

$$N(t) = N_0 e^{\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} t}\,.$$

(c) Aus der Definition von N erhalten wir für alle t:

$$-\frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{\lambda N_0 e^{-\lambda t}}{N_0 e^{-\lambda t}} = \lambda\,.$$

□