UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)

Lösungen zu Blatt 8

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

(a) $f(x) = x^x$, (b) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$, (c) $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$ $(x > 0)$.

Hinweis zu (a): Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ ist a^b definiert durch $a^b := \exp(b \ln(a))$.

Lösung: (a) Wegen $f(x) = x^x = \exp(x \ln(x))$ für alle $x > 0$ folgt nach der Kettenregel und der Produktregel

$$f'(x) = \exp(x \ln(x)) \frac{d}{dx}(x \ln(x)) = x^x(\ln(x) + 1) \qquad (x > 0)\,.$$

(b) Nach der Kettenregel gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \qquad (x > 0)$$

oder auch wegen $f(x) = \ln(\sqrt{x}) = \ln\left(\exp\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)\right) = \frac{\ln(x)}{2}$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln(x)}{2} = \frac{1}{2x} \qquad (x > 0).$$

(c) Nach der Kettenregel und Beispiel (b) nach Satz 2.25 der Vorlesung gilt

$$f'(x) = \arctan'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(1 + x)\sqrt{x}} \qquad (x > 0).$$

□

Aufgabe 2. Welche der folgenden auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen besitzen eine differenzierbare Umkehrfunktion?

(a) sinh, (b) cosh, (c) tanh, (d) $x \mapsto \exp(\exp(x))$.

Berechnen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktion in den Fällen, in denen sie existiert.

Lösung: (a) Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \geq 1$ für alle $x > 0$ ist sinh streng monoton wachsend und besitzt eine Umkehrfunktion. Diese wird mit Arsinh bezeichnet. Wegen $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $e^x \to \infty$ für $x \to \infty$, $e^x \to 0$ für $x \to -\infty$, gilt $\sinh(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, $\sinh(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz folgt $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Arsinh ist also eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Nach dem Satz über die Differentiation der Umkehrfunktion ist Arsinh auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arsinh}'(x) &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sinh(\operatorname{Arsinh}(x)))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,.\end{aligned}$$

(b) Da cosh eine gerade Funktion ist, also $\cosh(x) = \cosh(-x)$ gilt, ist cosh auf $\mathbb{R}$ nicht injektiv, besitzt also auf $\mathbb{R}$ keine Umkehrfunktion.

(c) Nach Aufgabe 1, Blatt 7, ist $\tanh'(x) = \frac{1}{(\cosh(x))^2}$. Da $\cosh(x) \geq 1$für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\tanh'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist tanh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und besitzt eine Umkehrfunktion. Diese wird mit Artanh bezeichnet. Nach Aufgabe 3, Blatt

6, gilt $\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty}\tanh(x) = -1$. Nach dem Zwischenwertsatz folgt $\tanh(\mathbb{R}) = (-1,1)$. Artanh ist also auf $(-1,1)$ definiert und nach dem Satz über die Differentiation der Umkehrfunktion auf $(-1,1)$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\tanh(x))} = (\cosh(\operatorname{Artanh}(x))))^2 \quad (x \in (-1,1))\,.$$

Zur weiteren Berechnung gehen wir vor wie bei der Berechnung von $\arctan'(x)$ in der Vorlesung. Wegen

$$(\tanh(y))^2 = \frac{(\sinh(y))^2}{(\cosh(y))^2} = \frac{(\cosh(y))^2 - 1}{(\cosh(y))^2}$$

ist (nach Auflösung der äußeren Gleichung nach $(\cosh(y))^2$):

$$(\cosh(y))^2 = \frac{1}{1-(\tanh(y))^2} \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Also gilt für alle $x \in (-1,1)$:

$$\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-(\tanh(\operatorname{Artanh}(x)))^2} = \frac{1}{1-x^2}\,.$$

(d) Für die durch $f(x) = \exp(\exp(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt nach der Kettenregel:

$$f'(x) = \exp'(\exp(x))\exp'(x) = \exp(\exp(x))\exp(x) > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Funktion f ist also auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, besitzt also eine Umkehrfunktion f^{-1}. Wegen $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ folgt $f(\mathbb{R}) = \exp((0,\infty))$. Wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion und $\exp(0) = 1$ ist nach dem Zwischenwertsatz $f(\mathbb{R}) = \exp((0,\infty)) = (1,\infty)$ und f^{-1} ist auf $(1,\infty)$ definiert und nach dem Satz über die Differentiation der Umkehrfunktion auf $(1,\infty)$ differenzierbar mit der Ableitung

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\exp(f^{-1}(x)))\exp(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x\exp(f^{-1}(x))} \qquad (x > 1).$$

Wegen $\exp(f^{-1}(x)) = \ln(\exp(\exp(f^{-1}(x)))) = \ln(f(f^{-1}(x))) = \ln(x)$ für alle $x > 1$ folgt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \qquad (x > 1).$$

□

Aufgabe 3. (a) Bei einer zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnenden chemischen Reaktion n-ter Ordnung ist die zum Zeitpunkt $t \geq 0$ umgesetzte Stoffmenge $f(t)$ bis auf einen konstanten positiven Faktor gegeben durch

$$f(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt[n-1]{1+(n-1)kt}} \qquad (t \geq 0),$$

wobei $k > 0$ eine Konstante ist. Zu welchem Zeitpunkt t ist die Reaktionsgeschwindigkeit $f'(t)$ am größten?

(b) Bei einer zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnenden chemischen Reaktion die zum Zeitpunkt $t \geq 0$ umgesetzte Stoffmenge $f(t)$ gegeben durch

$$f(t) = 1 - \frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\cdot\Big(\frac{e^{-k_1t}}{k_1} - \frac{e^{-k_2t}}{k_2}\Big) \qquad (t \geq 0),$$

wobei $k_1, k_2 > 0$ positive Konstanten sind. Zu welchem Zeitpunkt t ist die Reaktionsgeschwindigkeit $f'(t)$ am größten? Skizzieren Sie den Verlauf von $f(t)$ für $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Lösung: (a) Wegen

$$f(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt[n-1]{1+(n-1)kt}} = 1 - (1+(n-1)kt)^{-\frac{1}{n-1}} \qquad (t \geq 0)$$

folgt für die erste und zweite Ableitung von f nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{n-1}(1+(n-1)kt)^{-1-\frac{1}{n-1}}(n-1)k = k(1+(n-1)kt)^{-1-\frac{1}{n-1}}\,, \\ f''(x) &= -\Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)k(1+(n-1)kt)^{-2-\frac{1}{n-1}}(n-1)k \\ &= -nk^2(1+(n-1)kt)^{-2-\frac{1}{n-1}} < 0 \end{aligned}$$

für alle $x \geq 0$. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist also streng monoton fallend und nimmt daher ihren größten Wert am linken Intervallende also in $t = 0$ an. Die maximale Reaktionsgeschwindigkeit ist also $f'(0) = k$.

(b) Da durch $k_2 - k_1$ dividiert wird, ist natürlich $k_1 \neq k_2$ vorausgesetzt. Für die erste und zweite Ableitung von f erhalten wir nach den Rechenregeln für die Differentiation:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\cdot(e^{-k_1t}-e^{-k_2t}) \\ f''(t) &= \frac{k_1k_2}{k_2-k_1}(-k_1e^{-k_1t}+k_2e^{-k_2t}) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen sieht man $f'(0) = 0$ und für $t \to \infty$ gilt wegen $e^{-kt} \to 0$ für alle $k > 0$ nach den Grenzwertrechenregeln:

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = \frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\cdot(0-0) = 0\,.$$

Die zweite Ableitung $f''(t_0)$ nimmt in einem Punkt $t_0 \geq 0$ den Wert 0 genau dann an, wenn für t_0 gilt

$$k_1e^{-k_1t_0} = k_2e^{-k_2t_0}$$

Da der natürliche Logarithmus injektiv ist, ist dies äquivalent zu

$$\ln(k_1)+(-k_1t_0) = \ln(k_2)+(-k_2t_0), \quad \text{d.h. für} \quad t_0 = \frac{\ln(k_1)-\ln(k_2)}{k_1-k_2}\,.$$

Da t_0 die einzige Nullstelle von f'' ist und $f'(0) = 0 = \lim_{t\to\infty} f'(t)$ gilt, nimmt f' in t_0 sein Maximum an, wenn wir zeigen können, daß die Werte von f' immer ≥ 0 sind. Sei also $t > 0$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein κ zwischen k_1 und k_2 mit

$$\frac{e^{-k_1t}-e^{-k_2t}}{k_2-k_1} = -\frac{e^{-k_1t}-e^{-k_2t}}{k_1-k_2} = -\frac{d}{d\kappa}e^{-\kappa t} = te^{\kappa t} > 0\,.$$

Also folgt

$$f'(t) = k_1k_2\frac{e^{-k_1t}-e^{-k_2t}}{k_2-k_1} > 0 \qquad \text{für alle} \quad t > 0$$

und die maximale Reaktionsgeschwindigkeit wird zum Zeitpunkt $t_0 = \frac{\ln(k_1)-\ln(k_2)}{k_1-k_2}$ angenommen.

Für $k_1 = 1$ und $k_2 = 2$ ist $f(x) = 1-2\big(e^{-t}-\frac{e^{-2t}}{2}\big) = 1+e^{-2t}-2e^{-t}$ und die obige Rechnung zeigt: f ist auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend und besitzt in $t_0 = \frac{\ln(k_1)-\ln(k_2)}{k_1-k_2} = \ln(2)$ einen Wendepunkt. Ferner ist $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} = 1-0+0 = 1$. Zur Skizze siehe Abbildung 1. □

Aufgabe* 4. Eine bestimmte reelle Größe werde unter den gleichen Bedingungen n mal gemessen. Die hierbei gemessenen Werte $a_1,\ldots,a_n$ stimmen wegen der unvermeidlichen Meßfehler nicht überein. Nach Gauß betrachtet man den Wert a als das zuverlässigste Ergebnis, für den die Summe

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n}(x-a_j)^2 \qquad\qquad (x\in\mathbb{R})$$

im Punkt $x = a$ minimal wird. Bestimmen Sie diesen Wert a.

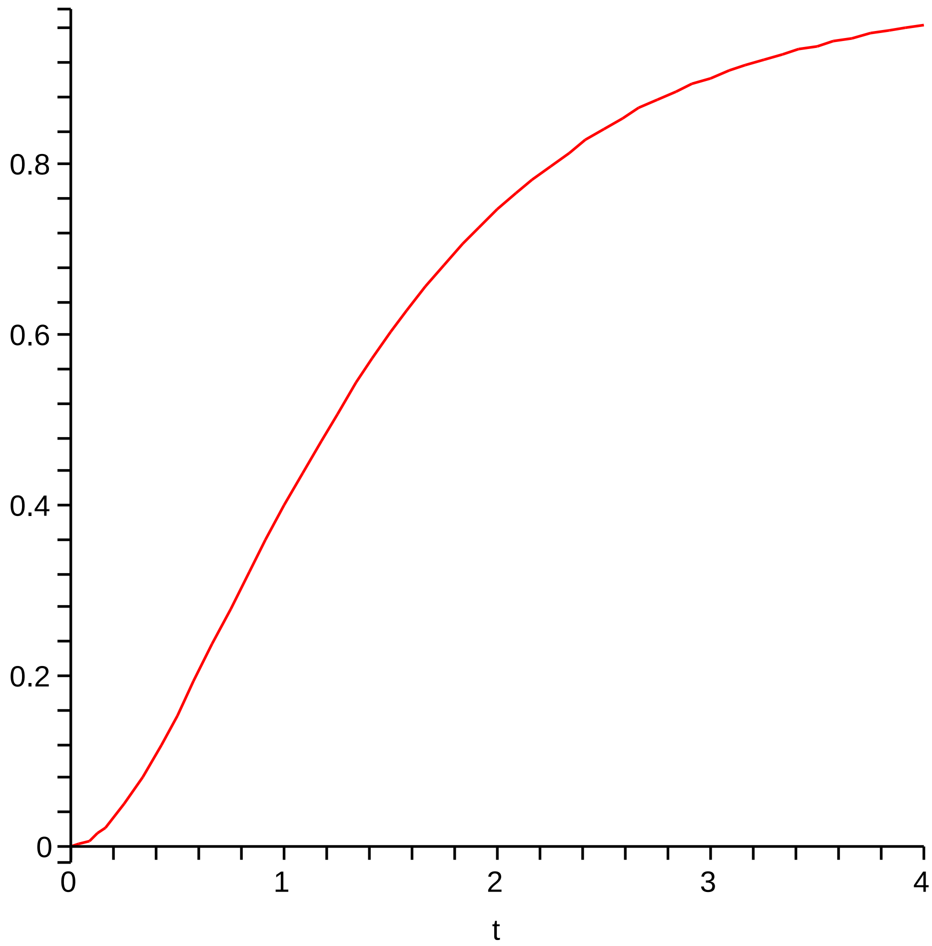

Abbildung 1. Graph der Funktion f aus Aufgabe 3 (b) für $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ im Bereich von 0 bis 4.

Lösung: $f(x)$ ist ein Polynom vom Grad 2 in x, also eine Parabel. Es gilt nach den Rechenregeln für die Differentiation:

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} 2(x - a_j) = 2nx - 2\sum_{j=1}^{n} a_j\,.$$

Die einzige Nullstelle von f' ist $a := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j$. Wegen $f''(a) = 2n > 0$ handelt es sich um eine isolierte lokale Minimumstelle. Die Parabel f ist also nach oben geöffnet und nimmt in a ihr Minimum an. Das arithmetische Mittel a der gemessenen Werte ist also der gesuchte Wert.