UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)

Lösungen zu Blatt 9

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Integrale

$$(a) \quad \int_0^1 (\sinh(x))^2\,dx \qquad (b) \quad \int_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,dx \qquad (c) \quad \int_{-2006}^{2006} \frac{x}{x^2+1}\,dx\,.$$

Lösung: (a) Zu berechnen ist das Integral

$$J := \int_0^1 (\sinh(x))^2\,dx = \int_0^1 \sinh(x)\cosh'(x)\,dx\,.$$

Durch partielle Integration (Satz 3.4 der Vorlesung) erhält man

$$J = \sinh(1)\cosh(1) - \sinh(0)\cosh(0) - \int_0^1 (\cosh(x))^2\,dx = \sinh(1)\cosh(1) - \int_0^1 (\cosh(x))^2\,dx\,.$$

Wegen $(\cosh(x))^2 = 1 + (\sinh(x))^2$ folgt (unter Verwendung von Rechenregel 3.1(e))

$$\begin{aligned} J &= \sinh(1)\cosh(1) - \int_0^1 1 + (\sinh(x))^2\,dx = \sinh(1)\cosh(1) - \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 (\sinh(x))^2\,dx \\ &= \sinh(1)\cosh(1) - 1 - J \end{aligned}$$

Auflösen nach J ergibt:

$$J = \int_0^1 (\sinh(x))^2\,dx = \frac{1}{2}(\sinh(1)\cosh(1) - 1)\,.$$

(b) Zu berechnen ist das Integral

$$J := \int_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1+1}{x+1}\,dx = \int_0^1 1 + \frac{1}{x+1}\,dx = 1 + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx\,.$$

Eine Stammfunktion zu der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ ist die Funktion $x \mapsto \ln(x+1)$. Also gilt nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung:

$$J = \int_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,dx = 1 + \ln(2) - \ln(1) = 1 + \ln 2\,.$$

(c) Nach der Kettenregel gilt für jede auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $f : I \to (0,\infty)$ mit Werten in den positiven reellen Zahlen:

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,. \tag{1}$$

Insbesondere ist also $x \mapsto \ln(f(x))$ eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$. Wegen $\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$ gilt also unter Verwendung von (1) (mit $f(x) = 1 + x^2$) nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_{-2006}^{2006} \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \int_{-2006}^{2006} \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2006}^{2006} \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}(\ln(1+2006^2) - \ln(1+(-2006)^2)) = 0\,. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ konvergent? Berechnen Sie $f(x)$ für alle x im Konvergenzbereich.
(b) Zeigen Sie, daß für alle x im Konvergenzbereich der Reihe aus (a) gilt

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung von $-f$ für die Funktion f aus (a).

Lösung: (a) Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Diese ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|-x| = |x| < 1$ und divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|-x| = |x| \geq 1$ (vergl. Beispiel 1.18 und Lemma 1.19 mit der anschließenden Bemerkung der Vorlesung). Nach Beispiel 1.18 gilt also für alle $x \in (-1, 1)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}\,. \tag{2}$$

(b) Da wir konvergente Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenzieren können erhalten wir durch Multiplikation von (2) mit -1 und anschließende Differentiation:

$$-f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

und hieraus durch Nummerierung der Summanden nach der Potenzordnung von x:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(-1)^k x^k\,.$$

□

Aufgabe 3. Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = \log(2 + \sin(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Untersuchen Sie f auf lokale Extrema. Skizzieren Sie den Graphen von f über dem Intervall $[0, 2\pi]$.

Lösung: Die Nullstellen von f liegen in den Punkten $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nach der Kettenregel gilt für die Ableitung:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)} \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Die Ableitung hat also Nullstellen in den Punkten $\frac{\pi}{2} + n\pi$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Mit der Quotientenregel folgt (unter Verwendung von $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$) für die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{(2+\sin(x))(-\sin(x)) - (\cos(x))^2}{(2+\sin(x))^2} = -\frac{2\sin(x)+1}{(2+\sin(x))^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

In den Nullstellen der ersten Ableitung gilt:

$$f''\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{cases} -\frac{1}{3} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

f besitzt also lokale Maximumstellen in den Punkten $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \ln(3)$$

und lokale Minimumstellen in den Nullstellen von f, also in den Punkten $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Aufgabe* 4. Berechnen Sie die (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n$ mit

$$(a) \quad x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2006} \qquad (b) \quad x_n = \exp(-n^{-1}) \qquad (c) \quad x_n = \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{2006n^2 - 1}$$

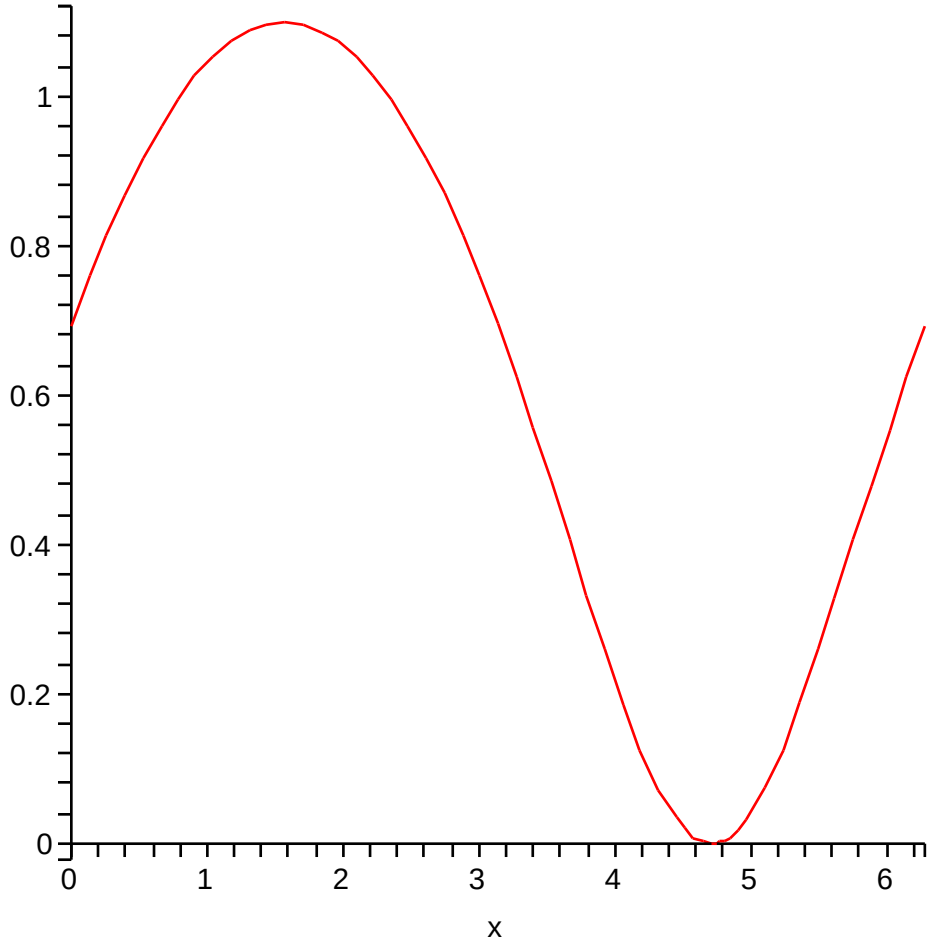

ABBILDUNG 1. Graph der Funktion f aus Aufgabe 3 im Bereich von 0 bis 2π.

Lösung: **(a)** Wegen

$$0 < x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2006} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

(nach Beispiel 1.8 der Vorlesung) folgt mit der Einschachtelungsregel 1.9 (d): $x_n \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion und wegen $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ folgt nach Bemerkung 2.2 der Vorlesung

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-n^{-1}) = \exp(0) = 1\,.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n = \frac{n^3+2n^2+1}{2006n^2-1} > \frac{n^3+2n^2+1}{2006n^2} > \frac{n^3}{2006n^2} = \frac{n}{2006}\,.$$

Ist also $C > 0$ beliebig und $n_0 > 2006C$ so folgt für alle $n \geq n_0$: $x_n > \frac{2006C}{2006} = C$. Also ist die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ im uneigentlichen Sinn konvergent gegen $+\infty$. □

Aufgabe* 5. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sinh(x)} \qquad (b) \quad \lim_{x\to\infty} \sin(e^{-x}) \qquad (c) \quad \lim_{t\to\infty} \frac{e^{2t}-t}{e^{2t}+t}$$

Lösung: (a) Wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

nach Blatt 6 der Übungen und wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - \sinh(0)}{x - 0} = \sinh'(0) = \cosh(0) = 1$$

folgt nach Quotientenregel für Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sinh(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sinh(x)} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

(b) Wegen $e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$ (nach Folgerung 2.7 der Vorlesung) und der Stetigkeit der Sinusfunktion folgt nach Lemma 2.12 (b) und Folgerung 2.7 der Vorlesung

$$\lim_{x\to\infty} \sin(e^{-x}) = \sin\left(\lim_{x\to\infty} e^{-x}\right) = \sin(0) = 0.$$

(c) Es gilt nach Beispiel 2.6 der Vorlesung und den Grenzwertrechenregeln:

$$\frac{e^{2t} - t}{e^{2t} + t} = \frac{1 - \frac{t}{(e^t)^2}}{1 + \frac{t}{(e^t)^2}} \to \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1\,.$$

□