UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)

Lösungen zur Hauptklausur vom 23.02.2007

Aufgabe 1. (8 Punkte)
Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $x_0 = x_1 = 1$ und $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie x_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ an.

Lösung: Die charakteristische Gleichung der Differenzengleichung

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$$

lautet:

$$\lambda^2 = 6\lambda - 9$$

und hat die doppelte Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Damit lautet die Lösungsgesamtheit der Differenzengleichung nach Satz 1.4 der Vorlesung:

$$\mathbb{L} = \{(\alpha 3^n + \beta n 3^n)_{n=0}^{\infty} \;;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Für die Lösung mit $x_0 = x_1 = 1$ muß also gelten

$$1 = x_0 = \alpha 3^0 = \alpha \qquad \text{und somit } \alpha = 1$$

$$1 = x_1 = 3\alpha + 3\beta = 3 + 3\beta \qquad \text{und somit } \beta = -\frac{2}{3}.$$

Für die gesuchte Folge gilt also $x_n = \left(1 - \frac{2n}{3}\right)3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{n^3}\binom{n}{3}.$$

Lösung: Nach den Grenzwertrechenregeln gilt:

$$\frac{6}{n^3}\binom{n}{3} = \frac{6n(n-1)(n-2)}{n^3 \cdot 3!} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \to 1$$

für $n \to \infty$. □

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Untersuchen Sie die durch

$$f(x) := x^2 e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

definierte Funktion auf lokale Extremstellen.

Lösung: Es ist $f(0) = 0 < f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also liegt in 0 ein lokales (sogar globales) Minimum vor. Für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to 0$. Also muß es in $(-\infty, 0)$ und in $(0, \infty)$ je wenigstens eine lokale Maximumstelle geben. An diesen Stellen muß die Ableitung verschwinden. Es ist

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2x(1-x^2)e^{-x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 1 \text{ oder } x = 0.$$

Die einzigen lokalen Extremstellen von f liegen also vor in 0 (Minimumstelle) und in den Punkten ± 1 (Maximumstellen). □

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{für alle } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie deren Ableitungsfunktion an.

Lösung: Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit $f'(x) = \cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. f ist also auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und besitzt daher nach Satz 2.25 der Vorlesung eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(f^{-1}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

für alle $x \in f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$. Wegen $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ folgt nach dem Zwischenwertsatz (Satz 2.13 der Vorlesung) $f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = (-1, 1)$ und somit $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle $x \in (-1, 1)$. $\square$

Aufgabe 5. (12 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = xe^y\,, \qquad y(0) = 1.$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

Lösung: Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen (mit $g(x) = x$ und $h(y) = e^y$). Wir gehen nach 4.2 der Vorlesung vor: Multiplikation der gegebenen Differentialgleichung mit e^{-y} und anschließende Integration von 0 bis x ergibt

$$\int_0^x e^{-y(t)} y'(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}\,.$$

Das Integral auf der linken Seite berechnen wir mit der Substitutionsregel und erhalten

$$\frac{x^2}{2} = \int_0^x e^{-y(t)} y'(t)\,dt = -e^{-y(t)}\Big|_0^x = e^{-y(0)} - e^{-y(x)} = e^{-1} - e^{-y(x)}\,.$$

und hieraus

$$e^{-y(x)} = e^{-1} - \frac{x^2}{2}\,.$$

Für $|x| < \sqrt{2e^{-1}}$ können wir zum natürlichen Logarithmus übergehen und erhalten

$$y(x) = -\ln\left(e^{-1} - \frac{x^2}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-1} - \frac{x^2}{2}}\right) \qquad (-\sqrt{2e^{-1}} < x < \sqrt{2e^{-1}}).$$

Durch eine Probe überzeugt man sich, daß hierdurch tatsächlich eine Lösung der Anfangswertaufgabe gegeben ist. Der maximale Definitionsbereich dieser Lösung ist das Intervall $(-\sqrt{2e^{-1}}, \sqrt{2e^{-1}})$. $\square$

Aufgabe 6. (10 Punkte)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= b_1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

(a) für $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ und **(b)** für $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$.

Lösung: Wie im Beispiel 5.6 der Vorlesung und in der Lösung zu Aufgabe 7, Blatt 15, behandeln wir beide Aufgabenstellungen gemeinsam. Die um die beiden rechten Seiten erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Addition der ersten Zeile zur zweiten und Subtraktion des Dreifachen der ersten Zeile von der dritten Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Durch Addition des Doppelten der zweiten Zeile zur dritten erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion der dritten Zeile von der zweiten Zeile und anschließende Division der dritten Zeile durch 2 und Subtraktion des Ergebnisses von der ersten Zeile ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich dividieren wir noch die zweite Zeile durch -2 und addieren sie anschließend zur ersten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Lösung zu (a): $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$ und die zu (b): $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = 1$. $\square$