UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)
Lösungen zur Nachklausur vom 12.04.2007

Aufgabe 1. (8 Punkte)
Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie x_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ an.

Lösung: Die charakteristische Gleichung der Differenzengleichung

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n$$

lautet:

$$\lambda^2 = 6\lambda - 8$$

und hat die beiden Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Damit lautet die Lösungsgesamtheit der Differenzengleichung nach Satz 1.4 der Vorlesung:

$$\mathbb{L} = \{(\alpha 2^n + \beta 4^n)_{n=0}^{\infty} \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \ .$$

Für die Lösung mit $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ muß also gelten

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 = \alpha 2^0 + \beta 4^0 = \alpha + \beta \\ 2 &= x_1 = \alpha 2^1 + \beta 4^1 = 2\alpha + 4\beta \,. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt $\alpha = 1$ und $\beta = 0$. Für die gesuchte Folge gilt also $x_n = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei x eine feste reelle Zahl mit $-1 < x < 1$. Untersuchen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert oder sogar absolut konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)} \,.$$

Lösung: Es liegt nahe, das Quotientenkriterium anzuwenden: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit $a_n := \frac{x^n}{\ln(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x^{n+1}| \ln(n+1)}{\ln(n+2)|x^n|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}|x| \leq |x| \,.$$

Hierbei wurde verwendet, daß die Logarithmusfunktion auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend ist. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq |x| < 1 \,.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also absolut konvergent (und damit insbesondere auch konvergent). □

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Untersuchen Sie die durch

$$f(x) := \ln(x^8) - 6x + \frac{1}{2}x^2 \qquad (x > 0)$$

definierte Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ auf lokale Extremstellen.

Lösung: Nach den Rechenregeln für die Differentialrechnung ist f auf $(0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar. In lokalen Extremstellen muß die Ableitung verschwinden. Mit Hilfe der Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion folgt

$$f(x) = 8\ln(x) - 6x + \frac{1}{2}x^2 \qquad (x > 0).$$

Für die erste und zweite Ableitungsfunktion erhält man

$$f'(x) = \frac{8}{x} - 6 + x = \frac{1}{x}(x^2 - 6x + 8) \qquad (x > 0)$$

mit den Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ sowie

$$f''(x) = -\frac{8}{x^2} + 1 = \frac{1}{x^2}(x^2 - 8) \qquad (x > 0).$$

Wegen $f''(x_1) = -1 < 0$ und $f''(x_2) = \frac{1}{2} > 0$ liegt in $x_1 = 2$ eine lokale Maximumstelle und in $x_2 = 4$ eine lokale Minimumstelle vor mit den zugehörigen Funktionswerten

$$f(x_1) = 8\ln(2) - 10 \quad \text{und} \quad f(x_2) = 16\ln(2) - 16\,.$$

Die einzigen lokalen Extremstellen von f liegen also vor in den Punkten $x_1 = 2$ (Maximumstelle) und $x_2 = 4$ (Minimumstelle). Der Vollständigkeit halber sei noch vermerkt, daß $f(x) \to -\infty$ für $x \to 0$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to \infty$ (war nicht verlangt). □

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Funktion $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{für alle } x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$$

eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie deren Ableitungsfunktion an.

Lösung: Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit $f'(x) = \cos(x) < 0$ für alle $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. f ist also auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ streng monoton fallend und besitzt daher nach Satz 2.25 der Vorlesung eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f((\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})) \to (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ mit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = \frac{-1}{|\cos(f^{-1}(x))|} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \sin(f^{-1}(x))^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

für alle $x \in f((\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}))$. Wegen $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ folgt nach dem Zwischenwertsatz (Satz 2.13 der Vorlesung) $f((\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})) = (-1, 1)$ und somit $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle $x \in (-1, 1)$. □

Aufgabe 5. (12 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = 4x^3 e^y\,, \qquad y(0) = 1.$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

Lösung: Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen (mit $g(x) = \frac{1}{4}x^3$ und $h(y) = e^y$). Wir gehen nach 4.2 der Vorlesung vor: Multiplikation der gegebenen Differentialgleichung mit e^{-y} und anschließende Integration von 0 bis x ergibt

$$\int_0^x e^{-y(t)} y'(t)\, dt = \int_0^x 4t^3\, dt = x^4\,.$$

Das Integral auf der linken Seite berechnen wir mit der Substitutionsregel und erhalten

$$x^4 = \int_0^x e^{-y(t)} y'(t)\, dt = -e^{-y(t)}\Big|_0^x = e^{-y(0)} - e^{-y(x)} = e^{-1} - e^{-y(x)}\,.$$

und hieraus

$$e^{-y(x)} = e^{-1} - x^4\,.$$

Für $|x| < \sqrt[4]{e^{-1}} = e^{\frac{-1}{4}}$ können wir zum natürlichen Logarithmus übergehen und erhalten

$$y(x) = -\ln\left(e^{-1} - x^4\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-1} - x^4}\right) \qquad \left(-e^{-\frac{1}{4}} < x < e^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Durch eine Probe überzeugt man sich, daß hierdurch tatsächlich eine Lösung der Anfangswertaufgabe gegeben ist. Der maximale Definitionsbereich dieser Lösung ist das Intervall $(-e^{-\frac{1}{4}}, e^{-\frac{1}{4}})$. □

Aufgabe 6. (10 Punkte)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

(a) für $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ und **(b)** für $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$.

Lösung: Wie im Beispiel 5.6 der Vorlesung und in der Lösung zu Aufgabe 7, Blatt 15, behandeln wir beide Aufgabenstellungen gemeinsam. Die um die beiden rechten Seiten erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Addition der ersten Zeile zur zweiten und Subtraktion des Dreifachen der ersten Zeile von der dritten Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Durch Addition des Doppelten der zweiten Zeile zur dritten erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion der dritten Zeile von der zweiten Zeile und anschließende Division der dritten Zeile durch 2 und Subtraktion des Ergebnisses von der ersten Zeile ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich dividieren wir noch die zweite Zeile durch -2 und addieren sie anschließend zur ersten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Lösung zu (a): $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$ und die zu (b): $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{4}$, $x_3 = 1$. □