UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramts Chemie (WS 2006/07)
Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2006}-1}{x-1}$.
(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.
(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$.

Lösung: (a) Bei der Behandlung von Beispiel 1.18 wurde in der Vorlesung gezeigt, daß für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n) = 1-x^{n+1}$$

Speziell für $n = 2005$ folgt also $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{2005}) = 1-x^{2006}$ und hieraus mit den Grenzwertrechenregeln

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{2006}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(1+x+x^2+\ldots+x^{2005}) = 2006.$$

(b) Zähler und Nenner des Bruchs haben die Nullstelle 2. Die zweite Nullstelle des Zählers ist offensichtlich 3. Wir erhalten also

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-3) = -1\,.$$

(c) Zähler und Nenner des Bruchs haben die Nullstelle 3. Ferner folgt wie in der Lösung zu (a)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} 9\frac{(\frac{x}{3})^3-1}{\frac{x}{3}-1} = 9\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}\right) = 27\,.$$

□

Aufgabe 2. Berechnen Sie unter Verwendung der Potenzreihendarstellung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,.$$

Lösung: Aus der Reihendarstellung der Sinusfunktion folgt mit den Reihengrenzwertrechenregeln

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-1}\,.$$

Wir vermuten daher daß der gesuchte Grenzwert 1 ist. Für $|x| < 1$ haben wir die Abschätzung

$$\left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| = \left|x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-1}\right| \le |x|\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-1}\right| \le |x|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!} \le |x|e$$

wegen $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} > |\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so folgt für alle x mit $|x-0| = |x| < \delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{e}\}$

$$\left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| \le |x|e < \varepsilon\,.$$

Also folgt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

Bei der Berechnung des zweiten Grenzwertes können wir unter Verwendung der Cosinusreihe analog vorgehen:

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\Big(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\Big) = -\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-2}\\ &= \frac{1}{2!}-x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-3}\end{aligned}$$

Wir vermuten also daß in diesem Fall der Grenzwert $1/2$ sein muß. Für $|x|<1$ haben wir die Abschätzung

$$\Big|\frac{1-\cos(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\Big| = |x|\Big|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-3}\Big| \le |x|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}|x|^{2n-3} \le |x|e\,.$$

Ist also $\varepsilon>0$ beliebig, so folgt für alle x mit $|x-0|=|x|<\delta:=\min\{1,\frac{\varepsilon}{e}\}$

$$\Big|\frac{1-\cos(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\Big| \le |x|e<\varepsilon\,.$$

Damit folgt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. □

Aufgabe 3. Für alle $x\in\mathbb{R}$ sei $\tanh(x):=\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty}\tanh(x)\qquad\text{und}\qquad\lim_{x\to-\infty}\tanh(x)$$

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung angegebenen Darstellungen

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\qquad\text{und}\qquad\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Lösung: Dem Hinweis folgend beachten wir:

$$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,.$$

Für $x\to\infty$ erweitern wir den Bruch mit e^{-x} und erhalten unter Verwendung von Folgerung 2.7 der Vorlesung mit den Grenzwertrechenregeln:

$$\lim_{x\to\infty}\tanh(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-(e^{-x})^2}{1+(e^{-x})^2}=\frac{1-0^2}{1+0^2}=1.$$

Für $x\to\infty$ also $-x\to-\infty$ folgt aus Folgerung 2.7 der Vorlesung $e^x=e^{-(-x)}\to 0$ und wir erhalten mit Hilfe der Grenzwertrechenregeln (nach Erweitern des Bruches mit e^x)

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1}=\frac{0^2-1}{0^2+1}=-1.$$

□

Aufgabe* 4. An der rechten Seite eines Baches haben sich viele Industriebetriebe angesiedelt, auf der linken Bachseite befinden sich nur Wald und Wiesen. Die minimale Uferlänge der Betriebe ist 20 m. An der Bachmündung wird bei einer Analyse des Wassers festgestellt, daß eine schädliche Substanz in das Wasser des Baches eingeleitet wird. 10 km bachaufwärts, bei der Quelle, ist die Wasserqualität noch in Ordnung. Herr Müller soll den Umweltsünder ermitteln und geht dabei folgendermaßen vor: Er macht eine Wasseranalyse in der Mitte des betroffenen Bachabschnitts und stellt fest, daß der Übeltäter die Substanz entweder oberhalb oder unterhalb dieser Stelle einleitet. Er wiederholt dies in dem Teilabschnitt in dem der Verursacher der Umweltverschmutzung offensichtlich die Substanz einleitet. Auf diese Weise fährt er fort, bis der Streckenabschnitt, in dem die illegale Einleitung vorgenommen wird, kleiner ist, als die minimale Uferlänge der Betriebe, so daß er nur noch das Gelände von maximal zwei Betrieben nach der Verschmutzungsquelle absuchen muß. Wie viele Messungen muß Herr Müller bei dieser Vorgehensweise höchstens durchführen? Hierbei sollen die Ausgangsmessungen an der Bachmündung und an der Quelle nicht mitgezählt werden. Welchen Weg legt er dabei maximal zurück, wenn er von der Bachmündung aus startet?

Lösung: Bei jeder Messung wird die Strecke, in der der Umweltsünder seinen Betrieb haben kann, halbiert. Nach n Messungen ist also die Länge der Uferstrecke, in der sich dieser Betrieb befinden kann auf die Länge $\frac{10000}{2^n}$m eingegrenzt. Ist die verbleibende Strecke ≤ 20m, so muß Herr Müller noch maximal zwei Betriebe überprüfen. Es ist $\frac{10000}{2^n} \leq 20$ genau dann, wenn $2^{n+1} \geq 1000$. Wegen $2^9 = 512$ und $2^{10} = 1024$ folgt: $n = 9$ ist die kleinste natürliche Zahl mit $2^{n+1} \geq 1000$. Herr Müller muß also neun Messungen vornehmen. Vor der ersten Messung muß Herr Müller $\frac{10000}{2}$m zurücklegen, vor der zweiten nur noch die Hälfte davon als $\frac{10000}{2^2}$m, vor der n-ten nur noch $\frac{10000}{2^n}$m. Bei 9 Messungen ergibt dies eine Gesamtstrecke von

$$\sum_{k=1}^{9} \frac{10000}{2^k}\text{m} = 10000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{2^k}\text{m} = 10000 \cdot (1 - 2^{-9})\text{m} = 9980.46875\text{m} .$$

□