

KAPITEL 0

Zur Vorbereitung

1. Die Sprache der Mathematik und etwas Mengenlehre

Wir gehen zunächst etwas auf die Sprache und Notation der Logik ein, soweit wir sie in dieser Vorlesung verwenden.

Die einfache Folgerung: Seien A und B zwei logische Aussagen, die wahr oder falsch sein können. Wir schreiben

$$A \implies B,$$

falls gilt: Immer, wenn A richtig ist, ist auch B richtig. Für diesen logischen Sachverhalt sagen wir auch: „Die Richtigkeit von B folgt aus der Richtigkeit von A “ oder „ A gilt nur dann, wenn B gilt“ oder „ B ist notwendig für A “ oder „ A impliziert B “.

Man nennt zwei Aussagen A und B *äquivalent* (Schreibweise: $A \iff B$), falls gilt: $A \implies B$ und $B \implies A$. Hierfür sagen wir auch: „ B ist notwendig und hinreichend für A “ oder „ B gilt dann und nur dann, wenn A gilt“ oder „ B gilt genau dann, wenn A gilt“.

Besteht die Äquivalenz von A und B aufgrund einer Definition, so schreiben wir: $A \stackrel{\text{def}}{\iff} B$ oder $A_{\text{def}} \iff B$, wobei der Doppelpunkt bzw. $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ auf der Seite steht, die durch die Äquivalenz definiert werden soll.

Das Gleichheitszeichen hat folgende Eigenschaften:

- (a) $A = A$ (*Reflexivität*),
- (b) $A = B \implies B = A$ (*Symmetrie*),
- (c) $A = B$ und $B = C \implies A = C$ (*Transitivität*).

Wenn zwei Objekte A, B laut Definition übereinstimmen sollen, so schreiben wir $A := B$ oder $A_{\text{def}} = B$, wobei der Doppelpunkt bzw. $\stackrel{\text{def}}{=}$ wieder auf der zu definierenden Seite steht.

Zur Abkürzung führen wir ferner die Quantoren der Generalisierung und der Partikularisierung ein:

Generalisierung: $\bigwedge_B \dots$ bzw. $\forall_B \dots$ bzw. $\forall B \dots$ Lies: „Für alle Objekte, die der Bedingung B genügen, gilt ...“. In der Vorlesung wird meist die letzte Schreibweise verwendet.

Partikularisierung $\bigvee_B \dots$ bzw. $\exists_B \dots$ bzw. $\exists B \dots$ Lies: „Es gibt ein Objekt, das der Bedingung B genügt, so daß gilt ...“. Hierbei ist „ein“ im Sinn „von wenigstens ein“ zu verstehen.

Nach diesen Vorbemerkungen, Vereinbarungen und Bezeichnungen wollen wir uns nun der (naiven) Mengenlehre zuwenden. Georg Cantor¹, der Begründer dieser Theorie, gab folgende „Erklärung“ der Begriffe „Menge“ und „Element einer Menge“:

¹GEORG CANTOR (3.3.1845–6.1.1918)

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denken (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Man könnte nun meinen, daß es sich hierbei um die Definition der Begriffe „Menge“ und „Element einer Menge“ handelt. Man stellt jedoch fest, daß die zu definierenden Begriffe „Menge“ und „Element einer Menge“ nur auf andere, undefinierte Begriffe (wie zum Beispiel „Zusammenfassung zu einem Ganzen“) zurückgeführt werden. Nun kann man natürlich nicht eine Theorie auf einer Definition aufbauen, da diese notwendigerweise auf Begriffe zurückgreifen muß, die im Rahmen der Theorie nicht definiert sind. Man muß also beim Aufbau der Mengenlehre offenlassen, was Mengen „wirklich sind“, ähnlich, wie bei der axiomatischen Begründung der Geometrie nicht gesagt wird, was Punkte und Geraden sind, sondern nur angegeben wird, welche Beziehungen zwischen ihnen bestehen.

Die (also nicht näher erläuterten) Grundbegriffe der Mengenlehre sind:

- (i) *Mengen* meist durch große lateinische Buchstaben $A, B, C, \dots, M, \dots$ sowie durch große deutsche Buchstaben² oder Sonderzeichen bezeichnet wie z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und andere.
- (ii) *Elemente von Mengen*: $x \in A$ (gelesen: x ist Element der Menge A). Elemente einer Menge werden häufig (aber nicht immer) mit kleinen lateinischen, griechischen oder deutschen Buchstaben bezeichnet. Ist x nicht Element von A , so schreibt man $x \notin A$.

Unsere erste Forderung ist nun, daß Mengen durch ihre Elemente eindeutig bestimmt sein sollen.

(M1) *Zwei Mengen A und B sind gleich ($A = B$ geschrieben) genau dann, wenn sie die gleichen Elemente haben.*

Will man also die Gleichheit von zwei Mengen A und B beweisen, so muß man zeigen, daß jedes Element von A auch ein Element von B ist und jedes Element von B auch ein Element von A ist.

(M1) erlaubt es (endliche) Mengen anzugeben, indem man ihre Elemente aufzählt (*aufzählende Schreibweise*), etwa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ oder $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ (diese beiden Mengen sind gleich). Weitere Beispiele $\{1, 2, 3\} \neq \{2, 3, 11\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ usw.

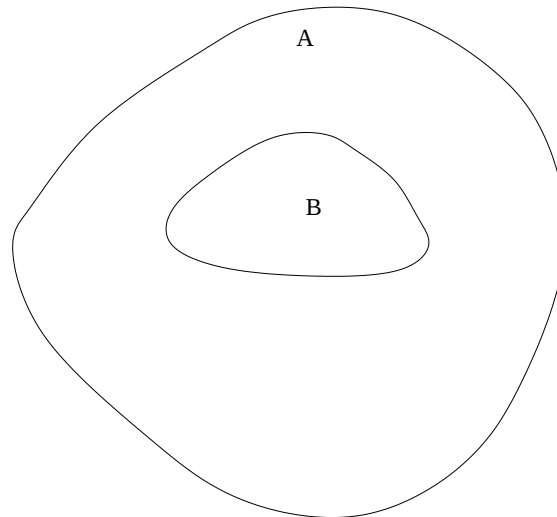
0.1. DEFINITION. Sei A eine Menge. Eine Menge B heißt *Teilmenge* von A , falls jedes Element von B auch ein Element von A ist. Wir schreiben dann $B \subseteq A$ oder $A \supseteq B$.

Ist $B \subseteq A$ und $B \neq A$, so nennen wir B eine *echte Teilmenge* von A und schreiben $B \subset A$.

Beispiele: $\{1\} \subseteq \{2, 1, 5\}$, $\{\beta, \alpha, \gamma\} \supseteq \{\beta, \gamma\}$. Für jede Menge A gilt offensichtlich $A \subseteq A$.

Häufig möchte man aus einer Menge alle Elemente mit einer vorgegebenen Eigenschaft aussondern und zu einer neuen Menge zusammenfassen. Sei z.B. M die Menge aller Teilnehmer an den Übungen zu dieser Vorlesung, welche in aufzählender Schreibweise durch die Angabe der Teilnehmer in einer Teilnehmerliste angegeben sei. Will man nun die Menge aller Teilnehmer dieser Vorlesung bilden, die im Hauptfach Biologie studieren so könnte man aus der Gesamtteilnehmerliste natürlich auf einer neuen Liste die

²Am Ende dieses vorbereitenden Kapitels befindet sich eine Wiedergabe des Alphabets in deutscher Schreifschrift und des griechischen Alphabets

ABBILDUNG 1. Veranschaulichung von $B \subseteq A$

Namen aller derjenigen Studierenden abschreiben, die im Hauptfach Biologie studieren. Rein schreibtechnisch ist es aber einfacher zu schreiben:

$$M_B = \{x; x \in M \text{ und } x \text{ studiert im Hauptfach Biologie}\}.$$

Eine solche Beschreibung erlaubt das folgende Aussonderungsaxiom (M2):

- (M2) Sei A eine Menge und sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die jedes Element $x \in A$ entweder hat oder nicht hat. Dann gibt es eine Menge B , deren Elemente genau diejenigen Elemente von A sind, die die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzen.

Nach (M1) ist B hierdurch eindeutig bestimmt. Wir schreiben

$$B = \{x; x \in A \text{ und } x \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E}\}$$

oder $B = \{x \in A; x \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E}\}$. Offensichtlich gilt $B \subseteq A$.

0.2. BEISPIEL. Sei A eine Menge und sei $\mathcal{E}$ die Eigenschaft $x \neq x$ für $x \in A$. Wir bilden gemäß (M2) die Menge $B := \{x; x \in A, x \neq x\}$. Da die Aussage $x \neq x$ für alle $x \in A$ falsch ist gibt es keine Elemente in A mit $x \neq x$. Die Menge B besitzt also keine Elemente. Wir nennen sie daher die *leere Menge* und bezeichnen sie mit $\emptyset$. Gelegentlich wird die leere Menge auch mit $\{\}$ bezeichnet. Nach (M1) ist $\emptyset$ eindeutig bestimmt. Ferner ist $\emptyset$ Teilmenge von jeder Menge.

0.3. DEFINITION. Seien A und B zwei Mengen, dann heißt

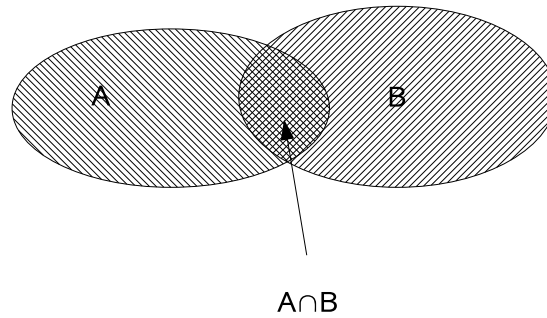
$$A \cap B := \{x; x \in A \text{ und } x \in B\}$$

der *Durchschnitt von A mit B*.

Nach (M2) ist $A \cap B$ offensichtlich eine Menge. Die Elemente von $A \cap B$ sind genau diejenigen, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

BEISPIELE. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$, $\{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$.

In dem folgenden Lemma fassen wir einige einfache Rechenregeln für die Durchschnittsbildung zusammen, die sich alle elementar beweisen lassen.

ABBILDUNG 2. Veranschaulichung von $A \cap B$

0.4. LEMMA. A, B, C seien Mengen. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $A \cap A = A$.
- (b) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- (c) $A \cap B = B \cap A$.
- (d) $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$.
- (e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- (f) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.

Man möchte manchmal auch über „sehr viele“ Mengen einen Durchschnitt bilden:

0.5. DEFINITION. Sei $\mathcal{M}$ eine Menge, deren Elemente wieder Mengen sind. Sei $M_0 \in \mathcal{M}$ beliebig. Dann definiert man

$$\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \in M_0; x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\}.$$

Statt $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ schreibt man manchmal auch $\bigcap \{M; M \in \mathcal{M}\}$. Der Durchschnitt $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ ist nach (M2) gebildet und damit eine eindeutig bestimmte Menge. Man zeigt auch leicht, daß $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ nicht von der speziell gewählten Menge M_0 abhängt, d.h. daß für alle $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\{x \in M_0; x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\} = \{x \in M_1; x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\}.$$

Um zeigen zu können, daß Definition 0.5 die Definition 0.3 als Spezialfall enthält, müssen wir wissen, daß es zu zwei Mengen A und B eine Menge C gibt, die A und B als Elemente enthält. Hierzu benötigen wir ein weiteres Axiom:

(M3) Zu je zwei Mengen A und B gibt es eine Menge C mit $A \in C$ und $B \in C$.

0.6. BEMERKUNG. Seien A und B zwei Mengen. Dann gibt es genau eine Menge, die genau A und B als Elemente enthält. Diese bezeichnen wir (in aufzählender Schreibweise) mit $\{A, B\}$.

Offensichtlich gilt nun für je zwei vorgegebene Mengen A und B :

$$A \cap B = \bigcap_{M \in \{A, B\}} M.$$

Eine weitere Möglichkeit aus vorgegebenen Mengen neue zu bilden liefert:

(M4) Zu jeder Menge A gibt es eine Menge, die alle Teilmengen von A als Elemente enthält.

Hiermit zeigt man leicht:

0.7. BEMERKUNG. Sei A eine Menge. Dann gibt es genau eine Menge, die genau alle Teilmengen von A als Elemente hat. Diese Menge nennen wir die *Potenzmenge von A* und bezeichnen sie mit $\mathcal{P}(A)$.

- BEISPIELE. (a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
 (b) $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}\{1\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$,
 (c) $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

0.8. DEFINITION. Seien A und B zwei Mengen. Die gemäß (M2) gebildete Menge

$$A \setminus B := \{x \in A; x \notin B\}$$

heißt die *Differenzmenge* zwischen A und B . Ist $B \subseteq A$, so nennt man $A \setminus B$ auch das *Komplement* von B in A und schreibt auch $\mathbb{C}_A B$ statt $A \setminus B$. Ist vom Zusammenhang her klar, bezüglich welcher Menge A das Komplement gebildet wird, so schreibt man auch kurz $\mathbb{C}B$.

BEISPIELE. Mit $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{3, 4, 5\}$, $C := \{1, 2, 3\}$ gilt $A \setminus B = \mathbb{C}_A B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \emptyset$, $B \setminus C = \{4, 5\}$, $C \setminus B = \{1, 2\}$.

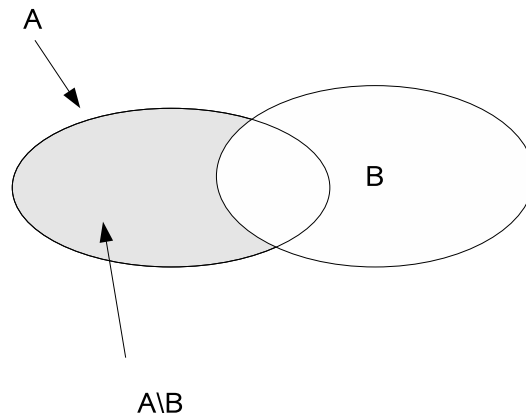


ABBILDUNG 3. Veranschaulichung der Differenzmenge $A \setminus B$

Im folgenden Lemma fassen wir einige Rechenregeln für die Differenzmengenbildung und die Komplementbildung zusammen.

0.9. LEMMA. Seien A, B, C und D Mengen mit $B \subseteq A$ und $C \subseteq A$. Dann gilt:

- (a) $\mathbb{C}_A \emptyset = A \setminus \emptyset = A$, $\mathbb{C}_A A = A \setminus A = \emptyset$.
- (b) $A \setminus D = A \setminus (A \cap D) = \mathbb{C}_A(A \cap D)$.
- (c) $(A \setminus D) \cap D = \emptyset$.
- (d) $B \cap \mathbb{C}_A B = \emptyset$.
- (e) $A \setminus (A \setminus D) = A \cap D$.
- (f) $\mathbb{C}_A(\mathbb{C}_A B) = B$.
- (g) $B \subseteq C \iff \mathbb{C}_A C \subseteq \mathbb{C}_A B$.

Um die Vereinigung von beliebigen Mengen bilden zu können, benötigen wir ein weiteres Axiom:

(M5) Zu jeder Menge $\mathfrak{M}$ von Mengen gibt es eine Menge M mit $A \subseteq M$ für alle $A \in \mathfrak{M}$.

0.10. DEFINITION. Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen und sei M eine gemäß (M5) existierende Menge mit $A \subseteq M$ für alle $A \in \mathcal{M}$. Dann können wir nach dem Aussonderungsaxiom (M2) die Menge

$$\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A := \bigcup \{A; A \in \mathcal{M}\} := \{x \in M; \exists A \in \mathcal{M} : x \in A\}$$

bilden. Man überlegt sich, daß $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$ von der speziellen Menge M mit $A \subseteq M$ für alle $A \in \mathcal{M}$ unabhängig ist. Die Menge $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$ heißt die *Vereinigung* der Mengen $A \in \mathcal{M}$.

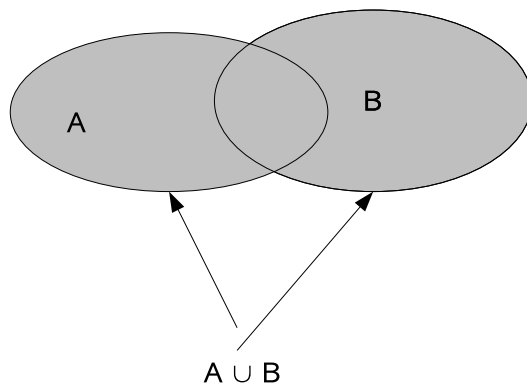


ABBILDUNG 4. Veranschaulichung der Vereinigung zweier Mengen A und B

- BEISPIELE. (a) Ist $\mathcal{M} = \emptyset$, so ist auch $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$.
 (b) Sind A und B zwei beliebige Mengen, so existiert nach (M3) und Bemerkung 0.6 die Menge $\{A, B\}$, die genau die Elemente A und B besitzt. Statt $\bigcup_{C \in \{A, B\}} C$ schreiben wir einfacher $A \cup B$. Die Menge $A \cup B$ ist also die Menge der Elemente, die Elemente von A oder von B sind.
 (c) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

0.11. LEMMA. A, B und C seien Mengen. Es gilt:

- (a) $A \cup A = A \cup \emptyset = A$.
- (b) $A \subseteq A \cup B$.
- (c) $A \cup B = B \cup A$.
- (d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- (e) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.
- (f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (h) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.
- (i) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
- (j) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Sind A und B zwei Mengen, so nennt man die Menge

$$A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}$$

der geordneten Paare von Elementen aus A und B die *Produktmenge* von A und B . Sind $(a, b), (u, v) \in A \times B$ gegeben, so heißen die beiden Elemente gleich, d.h. $(a, b) = (u, v)$ genau dann, wenn $a = u$ und $b = v$ gilt. Statt $A \times A$ schreibt man auch A^2 . Auch hierfür gelten eine Reihe von elementaren Rechenregeln, die wir im folgenden Lemma zusammen fassen.

0.12. LEMMA. Sind A, B, C, D Mengen, so gilt:

- (a) $A \times B = \emptyset \iff (A = \emptyset \text{ oder } B = \emptyset)$.
- (b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
- (c) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
- (d) Ist $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$, so ist $A \times B \subseteq C \times D$.

In den Naturwissenschaften studiert man Beziehungen (Relationen) zwischen den einzelnen Objekten der Untersuchungen.

0.13. BEISPIEL. Sei etwa H die Menge aller Bushaltestellen der Saarbahn GmbH. Wir definieren $a \in H$ steht in Relation zu $b \in H$, falls es eine direkte Busverbindung (ohne Umsteigen) von a nach b gibt und bilden die Menge

$$R := \{(a, b) \in H \times H; a \text{ steht in Relation zu } b\}.$$

Genau dann gilt für zwei Haltestellen $(a, b) \in R$, wenn a in Relation zu b steht. Statt $(a, b) \in R$ schreibt man auch aRb . Beispielsweise gilt uRb , wenn u die Haltestelle Universität-Campus und b die Haltestelle Bruchwiesenstraße in Dudweiler bezeichnet, aber es gilt nicht bRu . Eine Relation muß also nicht symmetrisch sein.

Unter einer *Relation* auf einer Menge A verstehen wir also eine Teilmenge R von $A \times A$ und schreiben statt $(a, b) \in R$ auch aRb .

Beispielsweise ist $R_:= \{(a, a); a \in A\}$ gerade die Gleichheitsrelation. Es gilt für zwei Elemente $a, b \in A$: Es ist $(a, b) \in R_:=$ genau dann, wenn $a = b$ gilt.

0.14. DEFINITION. Seien A und B zwei nicht leere Mengen. Unter einer *Abbildung* $f: A \rightarrow B$ von A nach B verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet. Zwei Abbildungen $f, g: A \rightarrow B$ heißen *gleich*, falls sie punktweise übereinstimmen, d.h. für alle $a \in A$ gilt: $f(a) = g(a)$.

A heißt der *Definitionsbereich* der Abbildung f und B der *Wertebereich*. Abbildungen mit Werten in den reellen Zahlen nennen wir auch *Funktionen*.

$f(a)$ heißt der *Bildpunkt* von $a \in A$ unter f . Für eine Teilmenge C von A heißt $f(C) := \{f(a); a \in C\} = \{b \in B; \exists a \in C: b = f(a)\}$ die *Bildmenge* von C unter f . Ist $D \subseteq B$, so heißt die Menge $f^{-1}(D) := \{a \in A; f(a) \in D\}$ die *Urbildmenge* von D unter f . Die Menge

$$G(f) := \{(a, f(a)); a \in A\} := \{(a, b) \in A \times B; b = f(a)\}$$

nennen wir den *Graphen* von f .

0.15. LEMMA. Seien A und B zwei nicht leere Mengen.

- (a) Eine Menge $G \subseteq A \times B$ ist genau dann Graph einer Abbildung von A nach B , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.
 - (i) $\forall a \in A \exists b \in B: (a, b) \in G$.
 - (ii) Sind $(a, b_1), (a, b_2) \in G$ so gilt schon $b_1 = b_2$.
- (b) Zwei Abbildungen $f, g: A \rightarrow B$ sind genau dann gleich, wenn ihre Graphen gleich sind.

BEWEIS. (a) Ist f eine Abbildung und $G = G(f) = \{(a, f(a)); a \in A\}$, so gibt es nach Definition der Abbildung zu jedem $a \in A$ genau einen Bildpunkt $f(a) \in B$. Dies zeigt, daß (i) und (ii) erfüllt sind. Ist umgekehrt $G \subseteq A \times B$ mit (i) und (ii) gegeben, so gibt es zu jedem $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ mit $(a, f(a)) \in G$. Hierdurch ist eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ definiert, für die $G(f) = G$ gilt.

(b) „ $\implies$ “ ist unmittelbar klar. Seien nun umgekehrt $f, g : A \rightarrow B$ zwei Abbildungen mit $G(f) = G(g)$. Dann gilt für alle $a \in A$: Es ist $(a, f(a)) \in G(f) = G(g)$ und damit $f(a) = g(a)$. $\square$

Das Lemma zeigt also, daß man jede Funktion als eine spezielle Relation auffassen kann. Nicht jede Relation ist auch eine Funktion. Beispielsweise ist die Bus-Relation aus Beispiel 0.13 keine Funktion, denn von der Haltestelle Hauptbahnhof aus kann man sehr viele, also mehr als eine andere Haltestelle ohne Umsteigen erreichen.

Beispiele von Abbildungen bzw. Funktionen hat man schon in der Schule kennengelernt. Auch im Verlauf dieser Vorlesung werden uns viele Beispiele begegnen. Deshalb beschränken wir uns hier zunächst auf ein paar wenige, die von elementarer Natur sind.

0.16. BEISPIELE. Sei A, C, D nicht leere Mengen.

(a) Die Funktion $\text{id}: A \rightarrow A$ mit $\text{id}(a) := a$ für alle $a \in A$ heißt die *Identität* auf A .

(b) Sei $B \subseteq A$. Dann heißt $\chi_B : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\chi_B(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{für } x \in A \setminus B \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* von A .

(c) Die Abbildung $p : C \times D \rightarrow C$ mit $p(c, d) := c$ für alle $(c, d) \in C \times D$ heißt die *Projektion auf die erste Koordinate*.

Im folgenden Lemma fassen wir wieder einige Rechenregeln zusammen.

0.17. LEMMA. Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung und seien C, D Teilmengen von A sowie E, F Teilmengen von B . Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.

(b) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$.

(c) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(d) $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$, wobei die Inklusion echt sein kann.

BEWEIS. Für $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(E \cap F) &\iff f(a) \in E \cap F \iff (f(a) \in E \text{ und } f(a) \in F) \\ &\iff (a \in f^{-1}(E) \text{ und } a \in f^{-1}(F)) \\ &\iff a \in f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(E \cup F) &\iff f(a) \in E \cup F \iff (f(a) \in E \text{ oder } f(a) \in F) \\ &\iff (a \in f^{-1}(E) \text{ oder } a \in f^{-1}(F)) \\ &\iff a \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F). \end{aligned}$$

Damit sind (a) und (b) bewiesen.

Für alle $b \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} b \in f(C \cup D) &\iff \exists a \in C \cup D : f(a) = b \\ &\iff (b \in f(C) \text{ oder } b \in f(D)) \\ &\iff b \in f(C) \cup f(D) \end{aligned}$$

und damit (c). Ferner:

$$b \in f(C \cap D) \iff (\exists a \in C \cap D : f(a) = b) \implies b \in f(C) \cap f(D).$$

Wir zeigen durch Angabe eines Beispiels, daß die Inklusion in (d) echt sein kann. Wir definieren $f : \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$ durch $f(1) := f(2) := 1$. Es ist $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$ und daher $f(\{1\} \cap \{2\}) = \emptyset$ aber $f(\{1\}) \cap f(\{2\}) = \{1\} \neq \emptyset$. $\square$

0.18. DEFINITION. Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$, so definieren wir die *Komposition* (*Hintereinanderausführung, zusammengesetzte Funktion*) $g \circ f : A \rightarrow C$ durch $(g \circ f)(a) := g(f(a))$ für alle $a \in A$.

Die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist assoziativ:

0.19. LEMMA. Sind $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ und $h : C \rightarrow D$ Abbildungen, so gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

BEWEIS. Für alle $a \in A$ gilt:

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) = h((g \circ f)(a)) = (h \circ (g \circ f))(a).$$

$\square$

0.20. BEISPIEL. Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\}$. Wir definieren $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) := \sqrt{x}$ für alle reellen $x \geq 0$. Dann gilt $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}_+}$ und $(g \circ f)(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

0.21. DEFINITION. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt

- (a) *injektiv*, falls für alle $x, y \in A$ aus $f(x) = f(y)$ schon $x = y$ folgt.
- (b) *surjektiv*, falls $f(A) = B$ ist, d.h. falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.
- (c) *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

0.22. BEISPIEL. Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 0.20. Dann ist f surjektiv aber nicht injektiv und g injektiv aber nicht surjektiv.

0.23. SATZ. Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Es gilt:

- (a) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_B$ und $g \circ f = \text{id}_A$.
- (b) Ist f bijektiv, so ist die Funktion g aus (a) eindeutig bestimmt.

BEWEIS. (a) Sei $f : A \rightarrow B$ bijektiv. Ist $b \in B$ beliebig, so gibt es, da f bijektiv ist, genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Wir setzen $g(b) := a$. Hierdurch wird eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ definiert mit $g(f(a)) = a$ für alle $a \in A$ und $f(g(b)) = b$ für alle $b \in B$.

Ist umgekehrt $g : B \rightarrow A$ eine Abbildung mit $f \circ g = \text{id}_B$ und $g \circ f = \text{id}_A$, so gilt für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2)$: Es ist

$$a_1 = \text{id}_A(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = \text{id}_A(a_2) = a_2.$$

Also ist f injektiv. Für alle $b \in B$ hat man $b = \text{id}_B(b) = f(g(b))$ mit $g(b) \in A$, d.h. f ist auch surjektiv und damit bijektiv.

(b) Ist auch $h : B \rightarrow A$ eine Funktion mit $f \circ h = \text{id}_B$ und $h \circ f = \text{id}_A$, so folgt wegen der Assoziativität der Hintereinanderausführung (Lemma 0.19): $h = h \circ \text{id}_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \text{id}_A \circ g = g$. $\square$

0.24. DEFINITION. Sei $f : A \rightarrow B$ eine bijektive Abbildung. Die gemäß Satz 0.23 eindeutig bestimmte Abbildung $g : B \rightarrow A$ mit $f \circ g = \text{id}_B$ und $g \circ f = \text{id}_A$ heißt die *Umkehrabbildung* (auch *inverse Abbildung*, *Umkehrfunktion* oder *inverse Funktion*). Man schreibt auch f^{-1} für g .

2. Die reellen Zahlen

Zunächst haben Sie in Ihrer Kindheit die Menge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen kennengelernt. Wir stellen sie gewöhnlich im Zehnersystem dar, z.B.

$$9876054 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 0 \cdot 100 + 6 \cdot 1000 + 7 \cdot 10000 + 8 \cdot 100000 + 9 \cdot 1000000.$$

Es handelt sich um eine *positionelle* Zahldarstellung: Die Stellung der Ziffer gibt ihre Wertigkeit an.

0.25. BEMERKUNGEN (Historischer Einschub für die Lehramtsstudierenden). Die positionelle Zahldarstellung im Zehnersystem und die indo-arabischen Ziffern tauchen in Europa erstmals gegen Ende des ersten Jahrtausends n.Chr. auf, wurden aber erst populär durch das Lehrbuch *Liber abaci* (1202) des Kaufmanns und Mathematikers Leonardo da Pisa³. Im römischen Kulturkreis wurde eine additive Schreibweise verwendet, wie Sie Ihnen aus der Schule bekannt ist:

Zahl	Zeichen
1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

Z.B. MMMDCCCLXXXVIII=3888.

Es gibt Anzeichen dafür, daß in China bereits im 2. Jhdt. v.Chr. ein positionelles Dezimalsystem bekannt war. Auch bei den Babyloniern gab es ein positionales Zahlssystem, allerdings nicht mit der Basis 10, sondern mit der Basis 60 (die wir ja noch heute bei der Zeitmessung verwenden: Eine Stunde hat 60 Minuten, eine Minute 60 Sekunden).

Die Majas hatten ein auf der Basis 20 beruhendes System. Auch in Europa findet man noch Spuren eines solchen Systems: achtzig heißt auf französisch *quatre-vingt* ($= 4 \cdot 20$).

Die positionalen Zahldarstellungen zu den Basen 2, 8, 16 findet Anwendung in der Informatik.

In Griechenland und später im gesamten Einflußbereich von Byzanz verwendete man eine Darstellung mit Hilfe der Alphabets.

Natürliche Zahlen kann man addieren und multiplizieren, aber Subtraktion und Division sind nur eingeschränkt möglich, weshalb man in der Schule zunächst die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ der *ganzen Zahlen* und anschließend die Menge $\mathbb{Q} = \{p/q; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ der *rationalen Zahlen* einführt.

Auch $\mathbb{Q}$ ist noch nicht hinreichend reichhaltig. So hat etwa die Gleichung $x \cdot x = 2$ keine Lösung in den rationalen Zahlen und auch den Umfang π eines Kreises vom Radius 1 kann man nicht durch eine rationale Zahl ausdrücken. Man hat daher die Menge $\mathbb{R}$ der

³LEONARDO DA PISA (genannt Fibonacci) lebte von etwa 1170 bis etwa 1240. Er hatte in Nordafrika (im heutigen Algerien) die enormen Vorteile des positionellen Zehnersystems kennengelernt.

reellen Zahlen eingeführt. Im Dezimalsystem ist jede reelle Zahl x durch einen unendlichen Dezimalbruch

$$x = \pm a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots \quad \text{mit } a_j, b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

dargestellt also z.B.

$$\sqrt{2} = +1.41421 \dots = 1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{10000} + 1 \cdot \frac{1}{100000} + \dots$$

Bei der Darstellung durch unendliche Dezimalbrüche ist darauf zu achten, daß $0,999999 \dots = 1$ gilt. Ist $b_i = 0$ für alle $i > i_0$ mit einem $i_0 \in \mathbb{N}$, so handelt es sich um einen *abbrechenden Dezimalbruch* und man schreibt $x = \pm a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_{i_0-1} b_{i_0}$

Die rationalen Zahlen sind genau die reellen Zahlen, die durch abbrechende oder periodische nicht abbrechende Dezimalbrüche dargestellt sind.

Für die reellen Zahlen gelten die folgenden Regeln:

(A) Addition:

- (A1) *Assoziativgesetz der Addition:* $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- (A2) *0 ist neutrales Element der Addition:* $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- (A3) *Existenz von bezüglich der Addition inversen Elemente:* Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$.
- (A4) *Kommutativgesetz der Addition:* $a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(M) Multiplikation:

- (M1) *Assoziativgesetz der Multiplikation:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- (M2) *1 ist neutrales Element der Multiplikation:* $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- (M3) *Existenz von bezüglich der Multiplikation inversen Elemente:* Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
- (M4) *Kommutativgesetz der Multiplikation:* $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(D) Distributivgesetz

- (D) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Aus diesen Grundregeln lassen sich die Ihnen aus der Schule bekannten weiteren Rechenregeln herleiten:

- **Die allgemeinen Assoziativgesetze:** Eine Summe (Produkt) ist unabhängig von der Klammerung: Beispiele:

$$(\dots((a_1 + a_2) + a_3) + \dots + a_{n-1}) + a_n = a_1 + (a_2 + (a_3 + \dots + (a_{n-1} + a_n) \dots))$$

$$(\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n = a_1 \cdot (a_2 \cdot (a_3 \cdot \dots \cdot (a_{n-1} \cdot a_n) \dots))$$

$$(a + b) + (c + d) = ((a + b) + c) + d, \quad (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = ((a \cdot b) \cdot c) \cdot d$$

Da es bei Summen bzw. Produkten nicht auf die Klammerung ankommt, läßt man die Klammern einfach weg und schreibt

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = (\dots((a_1 + a_2) + a_3) + \dots + a_{n-1}) + a_n$$

bzw.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = (\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n.$$

Häufig verwendet man zur kompakten Darstellung auch das *Summen-* bzw. *Produktsymbol*:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$$

bzw.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{j=1}^n a_j.$$

Dies bedeutet, daß über alle a_j die Summe bzw. das Produkt gebildet werden soll von $j = 1$ bis $j = n$. Nicht immer wird der kleinste Index 1 sein und statt j kann man auch andere Bezeichnungen für die Variable, über die summiert bzw. das Produkt gebildet werden soll, verwenden. Beispiele:

$$\sum_{k=1985}^{2006} a_k = a_k = a_{1985} + a_{1986} + \dots + a_{2005} + a_{2006}$$

$$\prod_{m=3}^6 \frac{m-1}{m} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}.$$

- **Die allgemeinen Kommutativgesetze:** Die Summen- bzw. Produktbildung von endlich vielen Zahlen $a_1, \dots, a_n$ ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren. Beispiele:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1,$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1,$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) &= a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \dots + a_n + b_n \\ &= a_0 + a_1 + \dots + a_n + b_0 + b_1 + \dots + b_n \\ &= \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=0}^n b_k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n (a_k \cdot b_k) &= a_0 \cdot b_0 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot b_n \\ &= a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot b_0 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_n \\ &= \left(\prod_{k=0}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=0}^n b_k \right) \end{aligned}$$

- **Das allgemeine Distributivgesetz:** Für alle $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n) &= a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + \dots + a_1 \cdot b_n \\ &\quad + a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_2 \cdot b_n + \dots \\ &\quad \dots + a_n \cdot b_1 + a_n \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist die n -te Potenz von x definiert durch: $x^n := \prod_{k=1}^n x$. Für $x \neq 0$ definiert man ferner $x^0 := 1$ und $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$. Es gelten die folgenden *Rechenregeln* für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$:

- (a) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$,
- (b) $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$,
- (c) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

$\mathbb{R}$ als angeordneter Körper: Eine von Null verschiedene reelle Zahl heißt *positiv*, falls ihre Dezimalbruchdarstellung ein $+$ als Vorzeichen hat. Die Menge der positiven reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}_+$. Man hat mit $\mathbb{R}_- := -\mathbb{R}_+ := \{-a; a \in \mathbb{R}_+\}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+,$$

wobei die drei Mengen auf der rechten Seite paarweise disjunkt sind, d.h. der Durchschnitt von je zwei der drei Mengen ist leer. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also genau eine der drei Aussagen

$$x \in \mathbb{R}_-, \quad x = 0 \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Man definiert nun für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

- $x < y$ wenn $y - x \in \mathbb{R}_+$ und sagt x ist echt kleiner als y und y ist echt größer als x ,
 $x \leq y$ wenn $x = y$ oder $y - x \in \mathbb{R}_+$ und sagt x ist kleiner oder gleich y
und y ist größer oder gleich x .

Die Rechenregeln in dem folgenden Lemma rechnet man leicht (mit Hilfe von Fallunterscheidungen) nach. Wir werden sie im folgenden laufend verwenden, ohne jeweils im einzelnen darauf hinzuweisen.

0.26. LEMMA. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ gilt:

- (a) $a > 0 \iff a \in \mathbb{R}_+, \quad a < 0 \iff -a \in \mathbb{R}_+.$
- (b) Es gelten die folgenden Transitivitätsaussagen:
 - (i) $(a < b \text{ und } b < c) \implies a < c.$
 - (ii) $(a < b \text{ und } b \leq c) \implies a < c.$
 - (iii) $(a \leq b \text{ und } b < c) \implies a < c.$
 - (iv) $(a \leq b \text{ und } b \leq c) \implies a \leq c.$
- (c) $(a < b \text{ und } c \leq d) \implies a + c < b + d.$
 $(a \leq b \text{ und } c \leq d) \implies a + c \leq b + d.$
- (d) $(a < b \text{ und } c > 0) \implies ac < bc.$
 $(a \leq b \text{ und } c \geq 0) \implies ac \leq bc.$
- (e) $(a < b \text{ und } c < 0) \implies ac > bc.$
 $(a \leq b \text{ und } c \leq 0) \implies ac \geq bc.$
- (f) Ist $a \neq 0$, so ist $a^2 = a \cdot a > 0$. Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$.
- (g) Kürzungsregeln: $(a + c \leq b \text{ und } c \geq 0) \implies a \leq b,$
 $(a + c < b \text{ und } c \geq 0) \implies a < b,$
 $(0 \leq ac \leq b \text{ und } c \geq 1) \implies a \leq b,$
 $(0 \leq ac < b \text{ und } c \geq 1) \implies a < b.$
- (h) Regeln für die Inversenbildung: $a \leq b \implies -a \geq -b, \quad a < b \implies -a > -b,$
 $0 < a \leq b \implies 0 < b^{-1} \leq a^{-1}, \quad 0 < a < b \implies 0 < b^{-1} < a^{-1}.$

0.27. DEFINITION. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt die durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

definierte Zahl der *Absolutbetrag* (oder auch kurz der *Betrag*) von x .

Wir fassen einige Eigenschaften des Absolutbetrags im folgenden Lemma zusammen:

- 0.28. LEMMA. (a) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad |x| \geq 0$. Es ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
(b) Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt: $|u| \leq v \iff -v \leq u \leq v$.
(c) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad -|x| \leq x \leq |x|$.
(d) Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt: $|uv| = |u| \cdot |v|$. Insbesondere gilt (mit $v := -1$): $|-u| = |u|$ für alle $u \in \mathbb{R}$.
(e) Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:
 - (i) $|u + v| \leq |u| + |v|$ Dreiecksungleichung.
 - (ii) $||u| - |v|| \leq |u - v|$.

BEWEIS. (a) folgt unmittelbar aus der Definition des Absolutbetrags.

(b) Ist $u \geq 0$, so ist $0 \leq u = |u|$ und die behauptete Äquivalenz ist offensichtlich. Ist $u < 0$, so ist $0 < |u| = -u$. Ist also $|u| \leq v$, so ist $v > 0$ und $-u \leq v$, also $-v \leq u < 0 < v$. Gilt umgekehrt $-v \leq u \leq v$, so folgt aus der linken Ungleichung mit Lemma 0.26 (i): $|u| = -u \leq v$.

(c) folgt mit $v := |u|$ aus (b).

(d) Ist $u \geq 0$ und $v \geq 0$ (bzw. $u \leq 0$ und $v \leq 0$), so folgt nach Lemma 0.26 (e) (bzw. (f)): $uv \geq 0$ und nach der Definition des Absolutbetrags $|uv| = uv = |u| \cdot |v|$ (bzw. $|uv| = (-u)(-v) = |u| \cdot |v|$). Ist $u \geq 0$ und $v \leq 0$ (bzw. $u \leq 0$ und $v \geq 0$), so folgt nach Lemma 0.26 (f): Es ist $uv \leq 0$ und somit $|uv| = -uv = u(-v) = |u| \cdot |v|$ (bzw. $|uv| = -uv = (-u)v = |u| \cdot |v|$).

(e) Wegen $-|u| \leq u \leq |u|$ und $-|v| \leq v \leq |v|$ (nach (c)) folgt die Dreiecksungleichung durch Anwendung von Lemma 0.26 (d).

Zu (ii): Nach der Dreiecksungleichung gilt: $|u| = |u - v + v| \leq |u - v| + |v|$ und damit $|u| - |v| \leq |u - v|$. Wegen $|v| = |v - u + u| \leq |v - u| + |u|$ folgt mit (c) auch $-|u - v| = -|v - u| \leq |u| - |v|$. Mit (b) folgt als die behauptete Ungleichung. $\square$

0.29. BEZEICHNUNGEN. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ nennen wir die Punktmenge

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$ ein *abgeschlossenes Intervall*.
- $[a, a] = \{a\}$ ein *ausgeartetes abgeschlossenes Intervall*.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ nennen wir

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$ ein *offenes Intervall*,
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\}$ und $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b\}$ ein *halboffenes Intervall*.

Für $a \in \mathbb{R}$ heißen die Mengen

- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} ; x > a\}$ und $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} ; x < a\}$ *offene uneigentliche Intervalle*,
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} ; x \geq a\}$ und $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} ; x \leq a\}$ *abgeschlossene uneigentliche Intervalle*.

3. Ein wenig Kombinatorik

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer Menge mit n paarweise verschiedenen Elementen k verschiedene Elemente auszuwählen, wenn es auf die Reihenfolge ankommt?

Für die erste Auswahl hat man n Möglichkeiten. Bei jeder dieser Möglichkeiten bleiben für die zweite Auswahl noch $n - 1$ Möglichkeiten. Man hat also insgesamt $n \cdot (n - 1)$ Möglichkeiten zwei Elemente auszuwählen. Für jede dieser Möglichkeiten bleiben noch $n - 2$ Elemente für die dritte Auswahl übrig. Es ergeben sich also $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ Möglichkeiten, drei Elemente auszuwählen. Fährt man in dieser Weise fort, so sieht man schließlich, daß es

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

Möglichkeiten gibt k Elemente unter Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.

Im Spezialfall $k = n$ sieht man: Jede Auswahl ist eine Anordnung der n verschiedenen Elemente. Solche Anordnungen nennt man auch *Permutationen*. Es gibt also

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{j=1}^n j$$

verschiedene Permutationen von n paarweise verschiedenen Elementen. Man definiert

$$n! := \prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

und nennt diesen Ausdruck n -Fakultät.

Beim Lotto 6 aus 49 werden aus 49 verschiedenen Kugeln 6 ausgewählt, auf deren Reihenfolge es jedoch nicht ankommt.

0.30. SATZ. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Dann gibt es

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Möglichkeiten k Elemente aus n verschiedenen Elementen auszuwählen, wenn es nicht auf die Reihenfolge ankommt.

Die Ausdrücke $\binom{n}{k}$ (lies "n über k") nennt man *Binomialkoeffizienten*. Offensichtlich gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

BEWEIS DES SATZES. Wie wir gesehen hatten, gibt es

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten k Elemente unter Beachtung der Reihenfolge auszuwählen. Da es für k Elemente $k!$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung gibt, haben von den $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ jeweils $k!$ die gleichen Elemente. Damit gibt es also $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Möglichkeiten k Elemente auszuwählen. $\square$

Damit gibt es im Lotto 6 aus 49 genau $\binom{49}{6} = 13983816$ also fast 14 Millionen Möglichkeiten!

Aus der Schule wissen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Multiplikation mit $a+b$ und Ausrechnen des Produkts auf der rechten Seite ergibt

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Allgemeiner gilt der Satz:

0.31. SATZ (Binomialsatz). Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

BEWEIS. Beim Ausmultiplizieren des n -fachen Produkts

$$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b) \cdot (a+b)$$

erhält man eine Summe der Form

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_{n,k} a^k b^{n-k}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten $C_{n,k}$ beachten wir, daß wir bei dem Ausmultiplizieren des obigen Produkts aus jedem der Faktoren entweder a oder b auswählen. Die Anzahl

der Möglichkeiten hierbei genau k mal a auszuwählen ist auf $\binom{n}{k}$ Arten möglich. Also muß $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ gelten. $\square$

0.32. LEMMA. Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

BEWEIS. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n + (n+1-n)}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} (n+1-k) \\ &= \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \cdot (k + (n+1-k)) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

$\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas und unter Verwendung von $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ lassen sich die Binomialkoeffizienten $\binom{m}{n}$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$ rekursiv berechnen: In dem Schema des *Pascalschen*⁴ *Dreiecks* ist jede Zahl im Innern des Dreiecks die Summe der beiden darüberstehenden Zahlen.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

⁴BLAISE PASCAL (19.6.1623–19.8.1662). Das Pascalsche Dreieck war chinesischen Mathematikern schon einige Jahrhunderte zuvor bekannt.