



Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2006/2007

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 26.10.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Wiederholungsübungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 1

(4+4+4=12 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

- (a) $\int_I \frac{1}{(x+y)^2} d(x,y)$, wobei $I := [1, 2] \times [3, 4]$.
- (b) $\int_I \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d(x,y)$, wobei $I := [0, 1] \times [0, 1]$.
- (c) $\int_I 1 d(x,y,z)$, wobei $I := \{(x,y,z); 0 \leq z \leq 1, -z \leq x \leq z \text{ und } -\sqrt{z^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2-x^2}\}$.
-

Aufgabe 2

(6+4=10 Punkte)

Gegeben sei die nichtlineare Gleichung

$$zx^4 + 2x \cos y + \sqrt{2} \sin z = 1.$$

- (a) Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}$ von $\frac{\pi}{4}$ und eine C^∞ -Funktion $\varphi : U \rightarrow V$ existieren mit $\varphi(0,0) = \frac{\pi}{4}$ und

$$\left\{ (x,y,z) \in U \times V; zx^4 + 2x \cos y + \sqrt{2} \sin z = 1 \right\} = \{(x,y, \varphi(x,y)); (x,y) \in U\}.$$

- (b) Berechnen Sie $\text{grad } \varphi(0,0)$.
-

Aufgabe 3

(8 Punkte)

In der Vorlesung wurde für $I = [0, 1]$, $f \in C(I, \mathbb{K})$ und $n \in \mathbb{N}$ das n -te Bernsteinpolynom zu f definiert durch

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad (x \in I).$$

Zeigen Sie, dass das n -te Bernsteinpolynom der Funktion $f(x) = x(1-x)$ die Form $B_n(f, x) = (1 - \frac{1}{n})x(1-x)$ hat.

Bitte wenden!

Aufgabe 4**(10 Punkte)**

Bestimmen Sie das Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y, z) := 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Aufgabe 5***(10 Punkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Integralgleichung

$$f(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{1 + |f(t)|} dt \quad (x \in [0, 1])$$

genau eine Lösung in $C([0, 1], \mathbb{R})$ besitzt. Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$ so, dass man - ausgehend vom Startwert $f_0 \equiv 0$ - mit der Iterationsvorschrift

$$f_n(x) := \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{1 + |f_{n-1}(t)|} dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

nach n Iterationsvorschriften eine Näherungslösung f_n erhält, die der Abschätzung

$$\sup\{|f(x) - f_n(x)|; x \in [0, 1]\} < 0,5 \cdot 10^{-3}$$

genügt.

Informationen zur Bepunktung der Aufgaben

- Punkte aus *-Aufgaben tragen nicht zur maximal erreichbaren Punktzahl bei, werden jedoch, wenn Sie eine solche bearbeiten, wie Punkte aus normalen Aufgaben gewertet. Auf diesem Blatt sind also 40 Punkte = 100%, aber Sie können 50 Punkte erreichen.
- Die Übungsgruppen beginnen in der Woche vom 30. Oktober mit der Besprechung dieses Übungsblattes. Entnehmen Sie bitte den Aushängen am schwarzen Brett in Gebäude E2 5, in welche Übung Sie eingeteilt wurden.