UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 11.01.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(5+5=10 Punkte)**

(a) Sei $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, für den die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt. Zeigen Sie, dass durch

$$< x, y > := \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ definiert wird mit $\|\cdot\| = <\cdot,\cdot>^{\frac{1}{2}}$.

(b) Sei $(\mathcal{H}, <\,,\,>)$ ein Prä-Hilbertraum und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen aus der Einheitskugel von $\mathcal{H}$ mit $< x_n, y_n > \to 1$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann $\|x_n - y_n\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Betrachten Sie zu $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad f_\lambda(x) := e^{i\lambda x}.$$

Zeigen Sie, dass auf $X := \text{LH}\,\{f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ durch

$$< f, g > := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}dx$$

ein Skalarprodukt gegeben ist.

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und E ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Orthogonalität zweier Elemente $x, y \in E$ kann man mittels

$$x \perp y :\Longleftrightarrow \|x\| \le \|x - ty\| \tag{1}$$

für alle $t \in \mathbb{K}$ definieren. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) In einem Hilbertraum stimmen die natürlich gegebene Orthogonalität und die gerade definierte überein.

Bitte wenden!

(b) Versehen Sie $\mathbb{R}^2$ mit der Maximumsnorm und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$, die orthogonal im Sinne von Gleichung (1) zu $(0,1)$ sind. Zeigen Sie, dass aus $x \perp y$ im Allgemeinen nicht $y \perp x$ folgt und aus $x \perp y_1, x \perp y_2$ im Allgemeinen nicht $x \perp (y_1 + y_2)$.

Aufgabe 4 **(2+4+3+3=12 Punkte)**

Sei $l^1(I) := \mathcal{L}^1(I, \mathfrak{P}(I), \mu)$, wobei μ das Zählmaß auf I ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathcal{L}^1(I, \mathfrak{P}(I), \mu) = L^1(I, \mathfrak{P}(I), \mu)$.

(b) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ ist genau dann in $l^1(I)$, wenn gilt

$$\sup_{A \in F(I)} \sum_{i \in A} |f(i)| < \infty,$$

wobei $F(I)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von I sei.

(c) Ist $f \in l^1(I)$, so ist $f(i) \neq 0$ für höchstens abzählbar unendlich viele $i \in I$. (Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $A_n := \left\{ i \in I : |f(i)| \geq \frac{1}{n} \right\}$.)

(d) Ist $f \in l^1(I)$ und $I_f := \{i \in I : f(i) \neq 0\}$, so gilt für jede Abzählung $(i_n)_{n=1}^{|I_f|}$ von I_f:

$$\int_I f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(i_n).$$

Aufgabe 5* **(5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

in $C^\infty(\mathbb{R})$ liegt.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!