



Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2006/2007

Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 18.01.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1

(9 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Unterraum $\mathcal{M}$ eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ genau dann dicht in $\mathcal{H}$ liegt, wenn $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$ ist.

Aufgabe 2

(9 Punkte)

Zeigen Sie die Bemerkung nach Folgerung 7.14 in der Vorlesung:
In jedem normierten $\mathbb{K}$ -Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ existiert zu jedem endlich dimensional
Untervektorraum V und jedem $x \in E$ eine Bestapproximation zu x aus V .

Die sogenannte *Gram-Schmidt Orthonormalisierung* wird durch den folgenden Satz beschrieben.

Satz

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine linear unabhängige Folge in dem Prähilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es eine orthonormale Folge $(e_n)_n$ in $\mathcal{H}$, so dass

$$\text{LH } \{e_1, \dots, e_n\} = \text{LH } \{x_1, \dots, x_n\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die e_n sind bis auf einen Faktor $\lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda_n| = 1$ eindeutig bestimmt.

Beweis

Setze $e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Bilde nun induktiv

$$x'_{n+1} := x_{n+1} - \sum_{\nu=1}^n \langle x_{n+1}, e_\nu \rangle e_\nu$$

$$e_{n+1} := \frac{x'_{n+1}}{\|x'_{n+1}\|}.$$

Da $x_{n+1} \notin \text{LH } \{x_1, \dots, x_n\} = \text{LH } \{e_1, \dots, e_n\}$, ist $x'_{n+1} \neq 0$. Offensichtlich stimmt die Eindeutigkeitsaussage für $n = 1$ und folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Der Vektorraum $C([-1, 1])$ wird mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \int_{-1}^1 x(t) \overline{y(t)} dt$ zu einem Prähilbertraum. Orthonormalisieren Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren die Polynome $1, t, t^2, t^3, t^4$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4**(10 Punkte)**

Betrachten Sie zu $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_\lambda(x) := e^{i\lambda x}$$

und sei $X := \text{LH } \{f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Nach Aufgabe 2 von Blatt 10 ist durch

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \overline{g(x)} dx$$

ein Skalarprodukt auf X gegeben. Zeigen Sie, dass die Familie $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ein Orthonormalsystem in X ist.

Aufgabe 5***(6 Punkte)**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien P_1, P_2 Orthogonalprojektionen auf abgeschlossene Unterräume L_1, L_2 von $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass $P := P_1 + P_2$ genau dann eine Orthogonalprojektion ist, wenn $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ ist.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html