UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 12

Abgabe: Donnerstag, 25.01.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**
Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des Hilbertraums $\mathcal{H}$ und sei $x_0 \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie für $x \in K$ die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) $\|x_0 - x\| = \inf_{y \in K} \|x_0 - y\|$.

(ii) $\mathrm{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \leq 0$ für alle $y \in K$.

Wir nennen einen normierten Raum X *separabel*, wenn es eine abzählbare Teilmenge U von X gibt, die dicht in X liegt.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**
Sei $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\mathcal{H}$ hat die Hilbertraumdimension $\aleph_0$.

(ii) $\mathcal{H}$ ist separabel.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass $L^p(U)$ für $1 \leq p < \infty$ separabel ist.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**
Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$-i \notin \sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\ \mathrm{Id} - T \text{ nicht invertierbar in } \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) T ist selbstadjungiert.

(ii) $U = (T - i)(T + i)^{-1}$ ist unitär.

(iii) $\|(T + i)x\| = \|(T - i)x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Gilt eine dieser Aussagen, so ist

$$T = i(I + U)(I - U)^{-1}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(6 Punkte)**

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum und sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, dass die Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ genau dann linear abhängig sind, wenn ihre *Gramsche Determinante* $\det(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1}^n$ verschwindet.

Informationen zur Hauptklausur

- Da einige Teilnehmer der Vorlesung zum ursprünglich geplanten Termin der Hauptklausur noch eine weitere Klausur schreiben, haben wir unseren Termin verschoben. Die Hauptklausur zur Analysis III findet nun am

  Samstag, den 24.02.2007 von 9-12 Uhr

  in den Hörsälen der Informatik statt.
- Alle Studierende im Bachelorstudiengang Mathematik müssen sich für die Klausur beim Prüfungssekretariat (Geb. E2 4, Zi. 103) anmelden. Der Anmeldezeitraum hierfür geht vom 22.01.2007 bis zum 26.01.2007.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`