UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 13

Abgabe: Donnerstag, 01.02.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(5+5=10 Punkte)**
Zeigen Sie, dass für einen stetigen linearen Operator T auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(a) $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$.

(b) $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$.

Aufgabe 2 **(9 Punkte)**
Sei P ein stetiger linearer Operator auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $P^2 = P$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) P ist orthogonale Projektion, d. h. es ist $\operatorname{ran} P \perp \operatorname{ran} (1_{\mathcal{H}} - P)$.

(ii) $P = P^*$, d. h. P ist selbstadjungiert.

(iii) P ist positiv.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**
Zeigen Sie, dass der Integraloperator

$$K_k : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N), \qquad (K_k f)(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} k(s,t) f(t)\, d\lambda_N(t)$$

mit $k \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ kompakt ist.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass messbare Funktionen der Gestalt

$$k_n(s,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \chi_{A_j}(s) \chi_{B_j}(t)$$

mit $\|k_n - k\|_{L^2} \to 0$ existieren und machen Sie eine Aussage über das Bild von K_{k_n}.)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(3+6=9 Punkte)**

Für $f \in L^2([0,1])$ und $x \in [0,1]$ definieren wir

$$(Vf)(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass die oben definierte Abbildung V linear und stetig von $L^2([0,1])$ in sich ist.

(b) Berechnen Sie den zu V adjungierten Operator.

Aufgabe 5* **(4 Punkte)**

Sei $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein kompakter Operator zwischen zwei Hilberträumen. Zeigen Sie, dass T^*T kompakt, selbstadjungiert und positiv ist.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`