UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 14

Abgabe: Donnerstag, 08.02.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Sei $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Projektion (also mit $P^2 = P$) auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $P^* = P$

(ii) $PP^* = P^*P$

(iii) Bild $P = (\ker P)^\perp$

(iv) $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

(a) Berechnen Sie das äußere Differential der folgenden 1-Formen auf $\mathbb{R}^3$:

(i) $x^2\, dx + y\, dz$.

(ii) $(x + \cos y)\, dy + 3\, dz$.

(b) Berechnen Sie das äußere Differential der folgenden 2-Formen auf $\mathbb{R}^3$:

(i) $x^2\, dx \wedge dy + e^z\, dy \wedge dz$.

(ii) $(x + \sin z)\, dx \wedge dy + y\, dx \wedge dz + xyz\, dy \wedge dz$.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{D}$ ein Untervektorraum und seien A, B lineare Abbildungen von $\mathcal{D}$ in sich mit

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle Bx, y\rangle = \langle x, By\rangle$$

für alle $x, y \in \mathcal{D}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt

$$\langle A^2x, x\rangle\langle B^2x, x\rangle \geq \frac{1}{4}\big\langle (AB + BA)x, x\big\rangle^2 + \frac{1}{4}\left\langle \frac{1}{i}[A, B]x, x\right\rangle^2,$$

wobei $[A, B] := AB - BA$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{D} := C_c^\infty(\mathbb{R})$. Definiere $P : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ und $Q : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ durch

$$(P\varphi)(x) := x\varphi(x) \qquad \text{und} \qquad (Q\varphi)(x) := \frac{\hbar}{i}\varphi'(x),$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ und h das Plancksche Wirkungsquantum bezeichnet. Sei weiter $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\|\varphi\|_2 = 1$ und

$$\langle P \rangle := \langle P\varphi, \varphi \rangle, \qquad \langle Q \rangle := \langle Q\varphi, \varphi \rangle$$
$$(\triangle P)^2 := \langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle := \langle (P - \langle P \rangle)^2 \varphi, \varphi \rangle$$
$$(\triangle Q)^2 := \langle (Q - \langle Q \rangle)^2 \rangle := \langle (Q - \langle Q \rangle)^2 \varphi, \varphi \rangle.$$

Zeigen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation

$$(\triangle P)(\triangle Q) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Aufgabe 5* **(4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $p \geq 1$ und sei $\omega \in \Lambda^p[dx, C^1(\Omega)]$. Man nennt ω *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ ist, und *exakt*, falls $\omega = d\eta$ mit einem $\eta \in \Lambda^{p-1}[dx, C^2(\Omega)]$. Zeigen Sie, dass jede exakte p-Form geschlossen ist.

Informationen zu den Klausuren

- Dies ist das letzte bewertete Übungsblatt zur Analyis III. Sie sind zur Haupt- bzw. Nachklausur zugelassen, wenn Sie die folgenden Bedingungen erfüllt haben:
  - durchgehende Anwesenheit in den Übungsgruppen (außer in begründeten Ausnahmefällen),
  - ernsthafte Bearbeitung von mindestens 75 % der Übungsaufgaben,
  - mindestens 50 % der möglichen Übungspunkte,
  - aktive Mitarbeit in den Übungsgruppen; d.h. Vorstellung der von Ihnen erarbeiteten Lösungen.
- Die Hauptklausur findet am Samstag, den 24.02.2007 von 9-12 Uhr in den Hörsälen der Informatik (Gebäude E1 3) und die Nachklausur am Donnerstag, den 15.03.2007 von 9-12 Uhr, in den Hörsälen der Mathematik statt.
- In der Woche vor der Klausur wird es am schwarzen Brett einen Aushang mit allen zu der Klausur zugelassenen Teilnehmern und der Raumverteilung für die Klausur geben.
- Sie müssen sich zur Hauptklausur anmelden. Die Anmeldung erfolgt in den Übungen in der Woche vom 12.02.2007 bis zum 16.02.2007. Zur Nachklausur ist automatisch jeder angemeldet, der die Hauptklausur nicht bestanden hat bzw. wer trotz Zulassung und Anmeldung nicht mitgeschrieben hat. Wollen Sie Ihre Note aus der Hauptklausur verbessern, so können Sie auch an der Nachklausur teilnehmen. In diesem Fall müssen Sie sich aber bis spätestens 07.03.2007 entweder bei Natalie Marx in Zimmer 225 in Gebäude E2 4 oder per Mail an marx@math.uni-sb.de anmelden. Schreiben Sie die Haupt- und die Nachklausur mit, so wird die bessere der beiden Noten gewertet.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`