



Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2006/2007

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 02.11.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1

(5+5=10 Punkte)

Sei (X, Σ) ein messbarer Raum.

- (a) Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ Σ -messbare Funktionen. Zeigen Sie:
Für alle $r > 0$ gilt $\{x \in X ; |f(x) - g(x)| < r\} \in \Sigma$.
- (b) Sei $(f_n)_n$ eine Folge Σ -messbarer Funktionen von X nach $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie:

$$\{x \in X ; \text{ die Folge } (f_n(x))_n \text{ konvergiert in } \mathbb{R}^N\} \in \Sigma.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j,k=m}^{\infty} \left\{ x \in X ; |f_k(x) - f_j(x)| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Aufgabe 2+3

(3+4+2+2+3+2+4=20 Punkte)

Sei $\hat{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, und sei

$$h : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1], \quad \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \\ -1, & x = -\infty \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung
- $$\hat{d} : \hat{\mathbb{R}} \times \hat{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty), \quad (x, y) \mapsto |h(x) - h(y)|$$
- ist eine Metrik auf $\hat{\mathbb{R}}$.
- (b) Die Abbildung h ist ein Homöomorphismus von dem metrischen Raum $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$ auf den metrischen Raum $[-1, 1]$ mit der vom Betrag abgeleiteten Metrik.
- (c) $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$ ist kompakt.
- (d) Eine Menge $U \subset \hat{\mathbb{R}}$ ist genau dann eine Umgebung von $+\infty$ (bzw. von $-\infty$) in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $(a, +\infty] \subset U$ (bzw. $[-\infty, a) \subset U$).
- (e) Die Inklusionsabbildung $J : \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ ist ein Homöomorphismus von $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ auf $(\mathbb{R}, \hat{d}|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}})$.
- (f) Jede in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$ offene Menge ist abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $[-\infty, a)$, (b, c) und $(d, \infty]$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

- (g) Ist (X, Σ) ein messbarer Raum, so ist $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ genau dann Σ -messbar, wenn $f^{-1}((a, \infty]) \in \Sigma$ gilt für alle $a \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}) = \Sigma(\{(a, \infty] ; a \in \mathbb{R}\})$.

Aufgabe 4

(10 Punkte)

Sei (X, Σ) ein messbarer Raum und sei (Y, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die in der Vorlesung behauptete Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) f ist einfach, d. h. es gibt paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ mit $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$, derart dass $f|_{A_j}$ konstant ist für $j = 1, \dots, n$.
- (ii) f ist Borel-messbar und die Menge $f(X)$ ist endlich.
-

Aufgabe 5*

(4+4=8 Punkte)

Sei X eine Menge und sei $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Algebra, falls gilt

$$\begin{cases} X \in \mathcal{A} \\ A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A} \\ A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $\mathcal{A} := \{A \subseteq X : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist eine Algebra.
- (b) $\mathcal{A}$ ist eine σ -Algebra $\iff X$ ist endlich.
-

Informationen zu den Übungen

- Wegen des Feiertages am Mittwoch, den 01. November, findet für die Mittwochsübungsgruppen eine gemeinsame Saalübung am Donnerstag, den 02. November von 16-18 Uhr im Hörsaal I der Mathematik statt.
- Eine Anmeldung zu den Übungsgruppen ist nur bis zum 01. November 2006 möglich.
- Raumänderung. Die Übungsgruppe mittwochs von 14-16 Uhr findet nicht wie angekündigt im Zeichensaal, sondern im SR 7 (Gebäude E2 4, 1. Obergeschoss) statt.