UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 09.11.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(5+5=10 Punkte)**

Ein Maßraum (X, Σ, μ) heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*, wenn $\mu(X) = 1$. In dieser Situation wird das Maß μ oft mit P bezeichnet und heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*. Die Elemente von Σ nennt man auch *Ereignisse*.

Sei (X, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $A, B \in \Sigma$ mit $P(B) > 0$ ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B* definiert als

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Sei $(B_n)_n$ eine Folge paarweise disjunkter Ereignisse mit $P(B_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

(a) Beweisen Sie die *Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit*

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) P(A|B_n) \qquad (A \in \Sigma).$$

(b) Zeigen Sie: Ist $A \in \Sigma$ derart, dass $P(A) > 0$, so gilt die *Formel von Bayes*

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k)P(A|B_k)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Aufgabe 2 **(4+4=8 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie, welche der folgenden Funktionen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto [0, \infty]$ Maße auf $\mathbb{R}$ sind:

(a) $\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$.

(b) $\mu(A) = \begin{cases} \infty, & A \text{ unbeschränkt} \\ 0, & A \text{ beschränkt} \end{cases}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 **(4+6=10 Punkte)**

Sei (X, Σ) ein messbarer Raum.

(a) Sei μ ein Maß auf X. Ist N eine μ-Nullmenge in X und ist $C \subset X$, so gilt:

$$\mu(C \cup N) = \mu(C) = \mu(C \setminus N).$$

(b) Seien $f_k : X \to \mathbb{K}^n$ für $k \in \mathbb{N}$ und $f : X \to \mathbb{K}^n$ Funktionen und sei $N \in \Sigma$ eine μ-Nullmenge. Sind alle f_k μ-messbar ($k \in \mathbb{N}$) und ist

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad (x \in X \setminus N),$$

so ist f μ-messbar.

Aufgabe 4 **(6+6=12 Punkte)**

Sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Treppenfunktion, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $f(n) = 0$ für alle $n > n_0$. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{n_0} f(n).$$

(b) Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Aufgabe 5* **(5 Punkte)**

Sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4

$$\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert absolut} \right\}.$$

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`