**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

# Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

## Blatt 4

**Abgabe:** Donnerstag, 16.11.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1** **(4x2=8 Punkte)**

Sei $X$ eine Menge und seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen von $X$. Mit $A \triangle B$ sei die symmetrische Differenz bezeichnet. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

(c) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$.

(d) $\chi_{A\triangle B} = |\chi_A - \chi_B|$.

---

**Aufgabe 2** **(3+4+4=11 Punkte)**

Sei $(X, \Sigma)$ ein messbarer Raum und seien $f : X \to \mathbb{R}, g : X \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen. Man definiert:

$$f^+ := \max(f, 0) \qquad \text{und} \qquad f^- := \max(-f, 0).$$

Zeigen Sie:

(a) $f$ $\mu$-messbar $\Longleftrightarrow$ $f^+$ und $f^-$ $\mu$-messbar.

(b) $f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R}) \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$.

(c) $g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C}) \Longleftrightarrow \text{Re } g, \text{Im } g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$.

Stellen Sie in (b) und (c) im Falle der Existenz die Integrale von $f$ und $g$ mit Hilfe der Integrale von $f^+$ und $f^-$ bzw. Re $g$ und Im $g$ dar.

---

**Aufgabe 3** **(6+5=11 Punkte)**

Sei $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ $\mu$-fast überall. Die Mengenfunktion $\mu_f : \Sigma \to [0, \infty]$ sei definiert durch

$$\mu_f(A) := \int_A f d\mu := \int_X f \chi_A d\mu \qquad (A \in \Sigma).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mu_f$ ist ein Maß auf $\Sigma$ mit $\mu_f(X) < \infty$.

**Bitte wenden!**

(b) Ist $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $g \geq 0$ $\mu$-fast überall, so gilt:

$$f = g \ \mu\text{-fast überall} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_f = \mu_g.$$

---

**Aufgabe 4** **(5+5=10 Punkte)**

Sei $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum und $E$ ein Banachraum. Für $f : X \to E$ sei $\|f\| : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|f\|(x) := \|f(x)\| \quad (x \in E).$$

(a) Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{M}(\Omega, E)$ ist $\|f\| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Im Beweis von Lemma 2.12(d) der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\|f\| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ist, wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ mit

$$\int_X \|f\| \, d\mu = 0,$$

so ist $f = 0$ $\mu$-fast überall.

---

**Aufgabe 5*** **(2+2=4 Punkte)**

Sei $X$ eine Menge und seien $A_n \subseteq X$ $(n \in \mathbb{N})$ Teilmengen von $X$. Der *Limes superior* und der *Limes inferior* sind definiert als

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x \in X : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{x \in X : \exists n_0(x) \in \mathbb{N} : x \in A_n \forall n \geq n_0(x)\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\chi_{\limsup A_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}$.

(b) $\chi_{\liminf A_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}$.

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`