



Übungen zur Vorlesung Analysis III  
Wintersemester 2006/2007

Blatt 5

**Abgabe:** Donnerstag, 23.11.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

Im Folgenden sei  $E$  ein Banachraum.

**Aufgabe 1** (10 Punkte)

Sei  $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum. Zeigen Sie, dass jede beschränkte Borel-messbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{K}^N$  mit

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$$

schon  $\mu$ -messbar ist und in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{K}^N)$  liegt.

---

**Aufgabe 2** (10 Punkte)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $f : X \rightarrow E$  stetig. Ferner gebe es eine kompakte Menge  $K \subseteq X$  mit  $f(x) = 0$  für alle  $x \in X \setminus K$ . Ist  $\mu$  ein positives Maß auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$  der Borelmengen von  $X$  mit  $\mu(K) < \infty$ , so ist  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$  mit  $\Omega = (X, \mathcal{B}(X), \mu)$ .

---

**Aufgabe 3** (10 Punkte)

Sei  $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$  und  $g : X \rightarrow \mathbb{K}$  eine beschränkte Borel-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch  $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$  gilt.

---

**Aufgabe 4** (10 Punkte)

Sei  $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum und  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ . Zeigen Sie, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Menge  $A \in \Sigma$  gibt mit  $\mu(A) < \infty$  und

$$\left\| \int_X f d\mu - \int_A f d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Hierbei sei  $\int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu$ .

---

**Aufgabe 5\*** (6 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Es existiert eine nichtendliche  $\sigma$ -Algebra mit abzählbar vielen Elementen.

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter