UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 23.11.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Im Folgenden sei E ein Banachraum.

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**
Sei $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass jede beschränkte Borel-messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}^N$ mit

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$$

schon μ-messbar ist und in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{K}^N)$ liegt.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $f : X \to E$ stetig. Ferner gebe es eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in X \setminus K$. Ist μ ein positives Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borelmengen von X mit $\mu(K) < \infty$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ mit $\Omega = (X, \mathcal{B}(X), \mu)$.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**
Sei $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ und $g : X \to \mathbb{K}$ eine beschränkte Borel-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ gilt.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**
Sei $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $A \in \Sigma$ gibt mit $\mu(A) < \infty$ und

$$\left\| \int_X f d\mu - \int_A f d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Hierbei sei $\int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu$.

Aufgabe 5* **(6 Punkte)**
Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Es existiert eine nichtendliche σ-Algebra mit abzählbar vielen Elementen.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`