UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 30.11.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(4+4+4=12 Punkte)**

Sei $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum und sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar mit $\int_X f d\mu = c \in (0, \infty)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $\alpha \geq 1$ ist die Funktion

$$x \mapsto n \log\left(1 + \frac{f^\alpha}{n^\alpha}\right) = g_{\alpha,n}$$

auf X integrierbar.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es eine Konstante $c_\alpha > 0$ gibt mit $g_{\alpha,n} \leq c_\alpha f$ auf ganz X.)

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \frac{f^\alpha}{n^\alpha}\right) d\mu = \begin{cases} c, & \text{für } \alpha = 1 \\ 0, & \text{für } \alpha > 1 \end{cases}.$$

(c) Ist $\mu(X) < \infty$, so ist $g_{\alpha,n} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ auch für $\alpha \in (0, 1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$, aber in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \frac{f^\alpha}{n^\alpha}\right) d\mu = \infty.$$

Aufgabe 2 **(5+2+5=12 Punkte)**

Sei $\Omega = (X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{C})$. Man definiert eine Mengenfunktion $\mu_f : \Sigma \to \mathbb{C}$ durch

$$\mu_f(A) := \int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu$$

für $A \in \Sigma$.

(a) Zeigen Sie, dass μ_f ein sog. *komplexes Maß* ist, d. h. es gilt $\mu_f(\emptyset) = 0$ und

$$\mu_f\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu_f(A_n)$$

für jede Folge (A_n) paarweise disjunkte Mengen in Σ. Dabei wird die Konvergenz der Reihe mitbehauptet, sie konvergiert sogar absolut.

(b) Jede μ-Nullmenge in Σ ist auch eine μ_f-Nullmenge.

Bitte wenden!

(c) Für jede disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit Mengen $A_n \in \Sigma$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_f(A_n)| \leq \|f\|_1.$$

Aufgabe 3 **(4+4=8 Punkte)**

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $A \in \Sigma$ gilt

$$\mu(A) < \delta \Longrightarrow \left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon.$$

(b) Zeigen Sie weiter, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) < \infty$ existiert, so dass für alle $B \in \Sigma$ gilt

$$B \supset A \Longrightarrow \left| \int_X f d\mu - \int_B f d\mu \right| < \varepsilon.$$

Aufgabe 4 **(4+4=8 Punkte)**

Bestimmen Sie die folgenden beiden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$

Aufgabe 5* **(2+5=7 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$f(x) = (|n| + 1)^{-2}$$

für alle $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) := \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda), \mathbb{R}).$$

(b) Für welche $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}$, ist

$$g_{\alpha,k} := k \log\left(1 + \frac{f(x)^\alpha}{k^\alpha}\right)$$

in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$?

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`