UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 07.12.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Sei $I = [a, b), -\infty < a < b \leq \infty$, ein halboffenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

$$f \in \mathcal{L}^1(\lambda\,|_I, \mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Das uneigentliche (Riemann-) Integral } \int_a^b |f(x)|dx \text{ existiert .}$$

In diesem Fall existiert das uneigentliche Riemann-Integral von f über $[a, b)$ und es gilt

$$\int_I f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Aufgabe 2 **(6+6=12 Punkte)**

Sei die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

existiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f jedoch nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 3 **(3x2=6 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_I (2x + 3y)\, d\lambda(x, y)$, wobei $I := [0, 2] \times [3, 4]$.

(b) $\displaystyle\int_I (xy + y^2)\, d\lambda(x, y)$, wobei $I := [0, 1] \times [0, 1]$.

Bitte wenden!

(c) $\int_I \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\, d\lambda(x,y,z)$, wobei $I := [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Aufgabe 4 **(6+6=12 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen des Segments eines Paraboloids,

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,h] \text{ und } y^2 + z^2 \leq \frac{r^2 x}{h} \right\}$$

$(r, h > 0)$ halb so groß wie das Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h ist.

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ der Durchschnitt der beiden Zylinder

$$Z_1 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \right\} \text{ und } Z_2 := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Berechnen Sie $\lambda(K)$.

Aufgabe 5* **(4 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 4.3 der Vorlesung:
Ist $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, so ist f schon gleichmäßig stetig.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`